

# Vibração de Barras em Pequena Amplitude com Efeito Geométrico

**ALEXANDRE DE M. WAHRHAFTIG**

Departamento de Construção e Estruturas, Escola Politécnica da Universidade Federal da Bahia (UFBA), Salvador, Bahia, Brasil.  
alixa@ufba.br

**REYOLANDO M. R. L. BRASIL**

Departamento de Estruturas e Geotécnica, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, São Paulo, Brasil.  
reyolando.brasil@poli.usp.br

**JOSÉ M. BALTHAZAR**

Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Computação, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, São Paulo, Brasil.  
jmbaltha@rc.unesp.br



## Resumo

Na engenharia, um grande número de estruturas podem ser modeladas como barras em balanço. Algumas dessas estruturas, por características que lhe são intrínsecas, são sensíveis a ações de natureza dinâmica. A frequência fundamental de vibração é fator preponderante para o cálculo das forças devidas ao vento. Normalmente, a consideração do efeito da força axial sobre as frequências naturais de uma estrutura remete a sistemas de equações diferenciais com solução inviável do ponto de vista da vida prática do engenheiro. Este artigo desenvolve uma expressão matemática simples para o cálculo, em pequenas amplitudes, da frequência fundamental para barras em balanço, que leva em conta a presença da sollicitação axial. Essa expressão foi validada por ensaios dinâmicos em laboratório.

**Palavras chave:** Dinâmica das estruturas. Não-linearidade geométrica. Princípio dos trabalhos virtuais. Investigação experimental. Frequência natural de vibração.

## Introdução

Na engenharia são encontradas um grande número de estruturas que podem ser reduzidas a sistemas constituídos apenas por uma barra em balanço. Os estudos de barras isoladas estão, frequentemente, relacionados à análise da estabilidade dos sistemas estruturais. No entanto, uma particular área que se interessa pelo estudo desses sistemas inclui estruturas submetidas à excitação ambiente. Algumas das estruturas submetidas a esse tipo de excitação, por características que lhe são intrínsecas, são sensíveis a ações de natureza dinâmica, e podem entrar em ressonância com o carregamento. Um clássico exemplo são os efeitos produzidos pelas rajadas de vento sobre chaminés, reservatórios elevados e postes de telecomunicações.

Tipicamente, essas são estruturas altas, de grande esbelteza ou sujeitas a cargas axiais elevadas, para as quais a rigidez geométrica pode ter importante efeito redutor nas suas frequências naturais de vibração. Usualmente as opções dadas ao engenheiro para analisar os efeitos do vento sobre as estruturas estão relacionadas às suas frequências naturais de vibração, sobretudo a do primeiro modo.

Embora de forma sutil, a consideração da rigidez geométrica é uma consideração não linear, já que a rigidez geométrica depende do estado de tensões internas (esforços internos) na estrutura que só se consegue determinar a partir das deformações causadas pelos deslocamentos que ela sofre. Claro que se forem mantidos esses esforços internos constantes a partir daí, estar-se-ia ignorando os deslocamentos adicionais que ocorrem a partir desse estado de deformações inicial. É pois uma linearização de um problema não linear a partir de uma certa configuração que não é a inicial descarregada.

Wilson e Habibullah (1987) afirmam que a utilização da rigidez geométrica na dinâmica estrutural é uma técnica viável para o cálculo dos efeitos de segunda ordem, pois esse efeito é linearizado e a solução do problema é obtida diretamente, de forma exata, sem interações. É válida para situações onde a força vertical devido ao peso próprio e sobrecargas permanecem constantes durante o movimento da estrutura e para aquelas situações, cujos deslocamentos laterais sofridos são pequenos quando comparados às suas dimensões. Nesse contexto, somente o peso próprio da estrutura e as sobrecargas verticais necessitam ser incluídas na parcela negativa da rigidez geométrica. Esse método se aplica tanto a cálculos estáticos quanto dinâmicos.

Além do mais, como expõe Rutenberg (1982), as cargas gravitacionais sobre as colunas dos edifícios são relativamente baixas quando comparadas à carga crítica de Euler, assim como os efeitos adicionais de segunda ordem, permitindo que se aplique uma solução aproximada via rigidez geométrica, linearizando o problema.

De sua vez, as estruturas civis são corpos sujeitos a esforços aos quais devem resistir para que a sua forma se mantenha razoavelmente próxima das configurações desejadas, durante os movimentos induzidos, ou seja, os movimentos de uma estrutura civil devem ser pequenos em torno de uma configuração projetada, portanto, a análise dinâmica sob não-linearidade geométrica realizada por meio da rigidez geométrica é perfeitamente cabível.

Por outro lado, o problema de vibração de vigas e colunas tem sido tratado por estudiosos que buscam conhecer as condições de perda de estabilidade (GAMBHIR, 2004) ou na consideração de não-linearidades presentes em muitos sistemas, por vezes, difíceis de serem contempladas pela equação do movimento. Em trabalho recente Yaman (2007) utiliza o Adomian Decomposition Method para determinar as vibrações de uma viga/coluna com uma massa concentrada na extremidade livre, com rotação variável em relação ao eixo reto inicial e com a consideração de seu peso próprio. No caso estudado por Yaman (2007), o problema conduz a resultados compatíveis com o Método dos Elementos Finitos, porém requer a solução laboriosa de sistemas de equações diferenciais parciais.

Nesse sentido, o objetivo deste artigo, é propiciar aos engenheiros uma forma segura de calcular a frequência fundamental de qualquer estrutura que possa ser modelada como elemento de barra simplesmente engastado, que conduza a resultados satisfatórios, visando tornar-se solução viável à prática da engenharia. A expressão desenvolvida possibilita levar em conta, em uma só operação, o efeito de uma força externa aplicada na extremidade livre e o peso próprio do elemento estrutural.

Este trabalho trata, portanto, de investigação preliminar, para avaliar resultados analíticos de uma solução matemática simplificada por meio de ensaios dinâmicos em laboratório.

À continuidade, o método aqui desenvolvido será empregado na determinação da frequência fundamental de estruturas reais, motivando estudos comparativos com outros métodos de análise, como o Método dos Elementos Finitos e investigação experimental em campo.

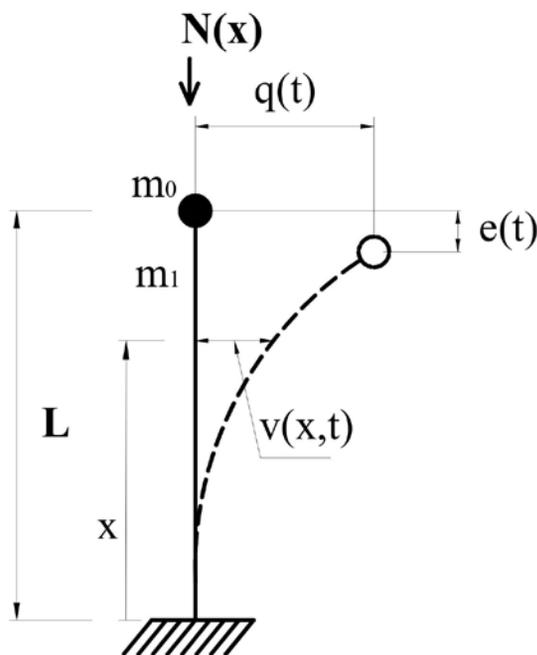
## 1 Modelo matemático simplificado

A formulação analítica que será desenvolvida para levar em conta a rigidez geométrica dos sistemas elásticos no cálculo de sua frequência fundamental, está baseada no Princípio dos Trabalhos Virtuais, associado a uma técnica do tipo Rayleigh (1945). Aplicações da técnica de Rayleigh a problemas de vibrações de sistemas mecânicos são encontradas em Biancolini, Brutti e Reccia (2005); Cheunga e Zhou (2003); Chiba e Sugimoto (2003), Hu et al (2004); Laura, Masiáb, Avalos (2006) e Kandasamy e Singh (2006).

O conceito básico que está por detrás desse método é o Princípio da Conservação da Energia dos sistemas mecânicos Clough (1993) e, portanto, aplicável a estruturas lineares ou não. De acordo com Temple (1933) o princípio fundamental desenvolvido por Rayleigh é aplicado não só a sistemas com um número finito de graus de liberdade, mas também a sistemas contínuos, e se destina tanto à determinação do período fundamental de vibração quanto às análises da estabilidade dos sistemas elásticos, com a precisão demandada pelos problemas da engenharia.

Para tanto, o Princípio dos Trabalhos Virtuais deve ser escrito em termos da coordenada generalizada, convenientemente escolhida no topo barra, e de uma função forma que descreve o primeiro modo de vibração. A precisão obtida por esse método depende inteiramente da função de forma assumida para representar o modo de vibração livre (Leissa, 2005.). Ao final do processo, a equação do movimento aparece em termos da coordenada generalizada e da qual se podem extrair as propriedades elásticas e geométricas generalizadas do sistema.

Considere-se o sistema contendo apenas o grau de liberdade horizontal e em movimento livre não amortecido, com os parâmetros apresentados na Fig.1.



**Figura 1** – Parâmetros para o desenvolvimento do modelo matemático

Admita-se que esse sistema seja composto por uma barra prismática, constituída de material elástico-linear, engastada na base, suportando, além do seu peso próprio, uma massa na extremidade livre, representativa dos corpos fixados ao seu topo. Considere-se também que o movimento do sistema não altera a orientação da força normal  $N(x)$ .

A estrutura representada pela Fig. 1 constitui uma barra em flexão. Assim, o trabalho virtual das forças internas  $\delta W_I$  é realizado pelo momento fletor  $M(x,t)$ , agindo sobre a curvatura

virtual  $\delta \left[ \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} \right]$  da barra. Admite-se que a seção permaneça plana após a deformação da barra. O Princípio dos Trabalhos Virtuais requer que o trabalho virtual das forças externas seja igual ao trabalho virtual das forças internas.

O trabalho virtual das forças externas é

$$\delta W_E = -\int_0^L f_1(x) \delta v(x) dx + N(x) \delta e \quad , (1)$$

onde  $f_1$  representa a força inercial. O trabalho virtual das forças internas é dado por

$$\delta W_I = \int_0^L M(x, t) \delta v''(x) dx \quad , (2)$$

onde  $\delta v''(x) = \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2}$  .

Para encontrar o deslocamento axial  $e(t)$  é preciso tomar um elemento infinitesimal  $ds$  da curvatura da barra. Logo, o encurtamento do eixo devido ao deslocamento axial será

$$ds - dx = \sqrt{dx^2 - dv^2} - dx = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2} - dx \quad , (3)$$

Pelo desenvolvimento binomial tem-se que

$$\left(1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right)^{1/2} = 1 + \frac{\left(\frac{dv}{dx}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{dv}{dx}\right)^4}{8} + \frac{\left(\frac{dv}{dx}\right)^6}{16} - \dots$$

Como os termos de ordem superior a  $\left(\frac{dv}{dx}\right)^2$  são muito pequenos comparados à unidade, pode-se fazer

$$\left(1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right)^{1/2} = 1 + \frac{\left(\frac{dv}{dx}\right)^2}{2} \quad ,$$

permitindo reescrever a Eq. (3) na forma de

$$ds - dx = dx \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \right] - dx = \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx. \quad (4)$$

Integrando a expressão (4) sobre toda a viga, obtém-se

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [v'(x, t)]^2 dx, \quad (5)$$

Como os parâmetros necessários à solução do problema podem ser expressos em função da coordenada generalizada  $q$  e de uma função de forma  $\phi(x)$ , tem-se

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \phi(x)q(t) & \delta v(x, t) &= \phi(x)\delta q(t) \\ v'(x, t) &= \phi'(x)q(t) & \delta v'(x, t) &= \phi'(x)\delta q(t) \\ v''(x, t) &= \phi''(x)q(t) & \delta v''(x, t) &= \phi''(x)\delta q(t) \\ \ddot{v}(x, t) &= \phi(x)\ddot{q}(t) & \delta \ddot{v}(x, t) &= \phi(x)\delta \ddot{q}(t) \\ \dot{v}''(x, t) &= \phi''(x)\dot{q}(t) & \delta \dot{v}''(x, t) &= \phi''(x)\delta \dot{q}(t) \end{aligned} \quad (6)$$

Substituindo-se convenientemente as Eq. (5) e (6) nas Eq. (1) e (2), chega-se a

$$\delta W_E = \left[ -\ddot{q}(t) \int_0^L m_1(x) (\phi(x))^2 dx + q(t) \int_0^L N(x) (\phi'(x))^2 dx \right] \delta q, \quad (7)$$

$$\delta W_I = \left[ q(t) \int_0^L EI \phi''(x)^2 dx \right] \delta q, \quad (8)$$

igualando as expressões (7) e (8), a equação do movimento livre não amortecido pode ser escrita em termos da coordenada generalizada

$$M\ddot{q}(t) + K_E q(t) - K_G q(t) = 0, \quad (9)$$

onde  $M$ ,  $K_E$  e  $K_G$  são a massa e as rigidezes generalizadas, descritas a partir da função de uma função de forma escolhida, com as expressões descritas a seguir.

Para levar em conta a massa existente no topo da barra, a massa generalizada total é dada por

$$M = m_0 + m_2, \quad (10)$$

com

$$m_2 = \int_0^L m_1 (\phi(x))^2 dx, \quad (11)$$

As rigidezes elástica e geométrica são

$$K_E = \int_0^L EI \left( \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} \right)^2 dx, \quad (12),$$

$$K_G = \int_0^L N(x) \left( \frac{d\phi(x)}{dx} \right)^2 dx, \quad (13).$$

Para o modelo da Fig. 1,  $N(x) = [m_0 + m_1(L-x)]g$ , com  $N(x)$  sendo a força normal interna distribuída e  $m_1$  é a massa por unidade de comprimento.

A função trigonométrica (14), ora arbitrada, pode ser encontrada em Clough (1993) e Timoshenko (1961), representa, de forma exata, o primeiro modo de flambagem do modelo, o que sugere que a sua validade está restrita à vizinhança da configuração de referência.

$$\phi(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right), \quad (14)$$

Resolvendo numericamente as integrais de (11) a (13), resultam a massa generalizada total, a rigidez elástica generalizada e a matriz de rigidez geométrica, respectivamente apresentadas nessa ordem, onde  $m_1$  é a massa por unidade de comprimento e  $m_0$  é a massa concentrada no topo da barra.

$$M = m_0 + \frac{1}{2} L m_1 \frac{3\pi - 8}{\pi} \quad (15)$$

$$K_E = \frac{\pi^4 EI}{32L^3} \quad (16)$$

$$K_G = \frac{1}{16} g \frac{2\pi^2 m_0 + (\pi^2 - 4)m_1 L}{L} \quad (17)$$

A rigidez generalizada total do sistema, considerando positiva a força axial de compressão, é, então,

$$K = K_E - K_G \quad (18)$$

Das expressões anteriores, chega-se à equação da frequência que leva em conta a influência do esforço axial, em Hertz:

$$f = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\left[ \frac{\pi^4 EI}{32 L^3} - \left[ \frac{\pi^2}{16} \left( \frac{2m_0 + m_1 L}{L} \right) - \frac{1}{4} m_1 \right] g \right]^{\frac{1}{2}}}{m_0 + \frac{3\pi - 8}{2\pi} L m_1} \right\} \quad (19)$$

Na expressão (19)  $E$  é o módulo de elasticidade do material,  $L$  é o comprimento da barra,  $I$  é o momento principal de inércia da seção e  $g$  é a aceleração da gravidade, cujo sinal coincide com o da força de compressão. Obvio está, que no desenvolvimento anterior foram desconsiderados os efeitos da força cortante sobre a curvatura da barra. Nesse momento, duas observações merecem ser feitas. Logicamente, se outras massas discretas existirem no sistema ter-se-á que levá-las em conta ajustando-se a expressão (19). Nos casos em que haja variação na geometria ou nas propriedades elásticas da estrutura é preciso resolver as integrais de (11) a (13) dentro dos limites estabelecidos para cada intervalo.

## 2 Ensaios dinâmicos em laboratório

Foram utilizados extensômetros elétricos de resistência de  $120 \Omega$  e fator 2,1 fabricados pela Excel Sensores (EXCEL SENSORES, 2006). O arranjo adotado para a ligação dos extensômetros ao sistema de aquisição de dados foi de  $\frac{1}{4}$  de ponte a três fios, ganho 2000, tensão de excitação de 5 volts.

Foram também utilizados acelerômetros do tipo piezoelétricos. Os acelerômetros piezoelétricos são de fabricação Brüel & Kjaer modelos 4393 e 4371, cujas características, respectivamente, são: sensibilidade - 3,1 pC/g e 10 pC/g, intervalo de frequência - 0,1 Hz à 16.500 Hz e 0,1 Hz à 12.600 Hz, frequência de ressonância - 55 kHz e 42 kHz, nível de ruído residual - 0,52 g e 0,24 g, nível operacional máximo - 5,000 g e 6,000 g, massa 2,4 gramas e 11 gramas (BRÜEL & KJAER, 2005). Os acelerômetros foram calibrados usando um calibrador excitador manual da Brüel & Kjaer tipo 4294 (BRÜEL & KJAER, 2005) e conectados ao sistema de aquisição com configuração de tensão diferencial, com ganho 1.

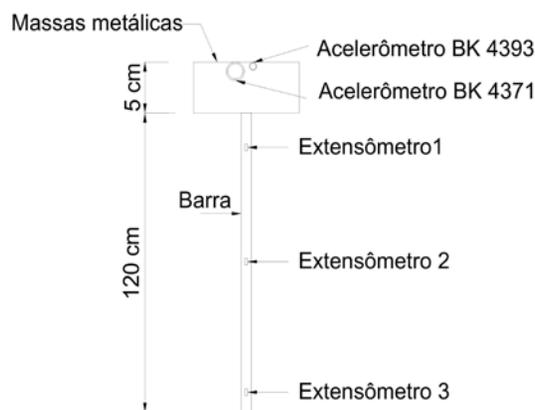
A ligação dos acelerômetros ao sistema de aquisição de dados foi precedida da ligação do acelerômetro ao amplificador modelo 2525 da própria Brüel & Kjaer (BRÜEL & KJAER, 2005).

O sistema de aquisição automático de dados empregado foi o ADS-2000/AqDados 7.02 (AqDADOS, 2003) com placa conversora AI-2161 e placa controladora AC-2122VA, da LYNX informática, de 16 bits de resolução, cuja interface com microcomputador é feita através de rede Ethernet (AqDANALYSIS, 2004). A ligação dos sensores ao sistema de aquisição de dados é realizada por meio dos conectores de entrada, que estão localizados na parte traseira do equipamento.

O corpo-de-prova era constituído por uma barra metálica chata de seção nominal de  $\frac{1}{2}$ " (12,70 mm) por  $\frac{1}{8}$ " (3,17 mm) ao qual foram fixadas, por pressão lateral, duas massas metálica na extremidade livre, que somadas às massas dos acelerômetros e suas bases magnéticas resultaram no valor total de 1,595 gramas no topo da haste.

Por ser uma peça de aço, o módulo de elasticidade longitudinal do material foi assumido como sendo de 205 GPa. A determinação da densidade do material da haste foi feita experimentalmente no laboratório de materiais do PCC/USP usando a técnica de picnometria com gás Hélio. A densidade relativa obtida foi de 8,19 (8,190 kg/m<sup>3</sup>). As demais massas envolvidas foram medidas na balança eletrônica.

O corpo-de-prova foi instrumentado com três extensômetros e dois acelerômetros, conforme a disposição mostrada na Fig. 2. Os extensômetros foram colados à superfície da barra, enquanto que os acelerômetros ficaram aderidos por meio das bases magnéticas que fazem parte do seu estojo de acessórios.



**Figura 2** – Instrumentação do corpo-de-prova

Com as massas metálicas adicionadas à haste foram adotadas três posições de ensaios, relativas às possíveis influências da carga axial na rigidez no sistema. A primeira posição considerou a influência da força axial de compressão, logo, posicionou-se o conjunto de forma ser comprimido pelo peso próprio da barra e pela carga vertical produzida pela massa no topo. A segunda posição considerou a influência da força axial de tração, de forma que o conjunto foi posicionado de maneira a gerar força de tração no sistema e o corpo-de-prova foi posto na posição inversa à anterior. A terceira posição analisou a ausência da influência da carga axial na frequência fundamental do modelo, por essa razão, o conjunto foi instalado na posição horizontal, como viga.

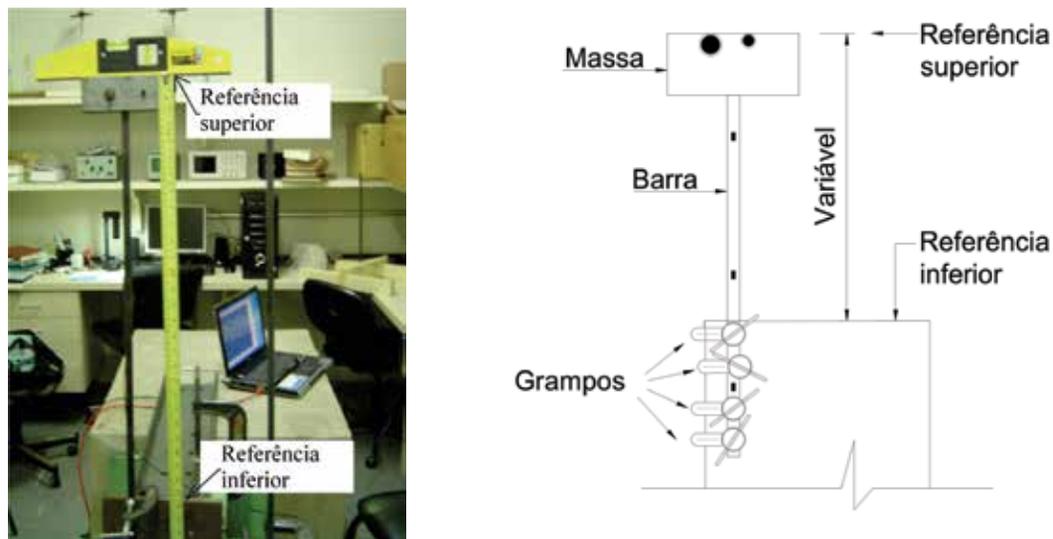
O corpo-de-prova foi fixado ao aparelho de apoio por meio de grampos metálicos conhecidos comumente como grampos tipo sargento. Buscou-se manter o mesmo padrão de fixação para todos os modelos, como o tamanho e a posição dos grampos em relação aos CP e a pressão de aperto. A superfície de contato entre os modelos e a base inercial foi cuidadosamente preparada para reduzir as imperfeições e eventuais rugosidades. Os cabos dos acelerômetros foram fixados para prevenir a interferência na leitura dos sinais.

Antes de serem excitados os modelos eram verticalmente nivelados. O conjunto de apoio conferia uma condição inercial segura para a realização dos ensaios.

O comprimento experimental de referência foi controlado visualmente e a sua determinação foi feita por meio de uma trena metálica (Fig.3). A opção por esse procedimento leva em conta que haja uma compensação quanto às incertezas devido ao real ponto de fixação dos modelos à base e a real posição de aplicação da força axial. As mesmas referências foram mantidas para as diferentes posições. Variou-se o comprimento de 5 cm em 5 cm até o limite físico de fixação possível ou até a posição de máxima estabilidade oferecida pelo conjunto.

Em ambos os ensaios, os modelos, nas diversas posições e comprimentos, foram excitados por uma força aleatória com magnitude necessária e suficiente para por o sistema em movimento oscilatório. Depois de excitados, os sistemas oscilavam em torno da sua posição inicial.

Os sinais no domínio do tempo foram gravados e analisados posteriormente. A obtenção da frequência do modo fundamental de vibração dos modelos foi feita pela transformada de Fourier no programa AqDAnalysis 7 (AqDANALYSIS, 2004). Para isso, a análise de auto-espectro disponibilizada pelo programa foi configurada para uma janela de compensação do tipo Hanning, com uma janela de dados para o cálculo do espectro médio; zoom da FFT (Transformada Rápida de Fourier) igual a 1; e com a máxima resolução permitida para a quantidade de amostras aquisitadas.



**Figura 3** – Referência de comprimento dos modelos

### 3 Resultados e conclusão

O Objetivo deste trabalho foi estabelecer uma formulação matemática relativamente simples para o cálculo da frequência fundamental de barras engastadas. Com essa formulação é possível, em um só cálculo, levar em conta a influência da força normal localizada na extremidade livre e o peso próprio da barra.

Para aferir essa formulação foi realizado um conjunto de ensaios dinâmicos em laboratório. A aceleração da gravidade foi assumida igual a  $9,8066 \text{ m/s}^2$ . Note-se que no caso de pequenas amplitudes, tanto a experiência quanto as soluções teóricas mostram que a influência do deslocamento inicial em relação ao comprimento do corpo é desprezível e que também a influência do amortecimento sobre o período de vibração pode, em geral, ser desprezado (Carneiro, 1996). Os resultados analíticos e experimentais estão dispostos na Tabela 1.

**Tabela 1** – Resultados experimentais e do modelo matemático simplificado

Frequência (Hz)						
L (m)	Barra Comprimida		Barra Tracionada		Barra como Viga	
	Resultado experimental	Modelo matemático simplificado	Resultado experimental	Modelo matemático simplificado	Resultado experimental	Modelo matemático simplificado
0,20	6,3477	6,3276	6,5430	6,5656	6,6230	6,4480
0,25	4,4556	4,4729	4,7000	4,7395	4,3700	4,6080
0,30	3,2959	3,3520	3,5710	3,6446	3,4180	3,5020
0,35	2,5024	2,6122	2,6890	2,9291	2,7100	2,7760
0,40	1,9836	2,0925	2,3800	2,4321	2,2220	2,2690
0,45	1,6479	1,7096	1,9840	2,0710	1,8550	1,8990
0,50	1,3428	1,4167	1,7330	1,7992	1,6110	1,6200
0,55	1,1292	1,1855	1,5240	1,5888	1,4160	1,4030
0,60	0,9155	0,9983	1,3430	1,4221	1,2450	1,2300
0,65	0,7935	0,8429	1,2210	1,2875	1,1470	1,0890
0,70	0,6104	0,7110	1,1230	1,1770	1,0500	0,9730
0,75	0,4883	0,5965	1,0250	1,0851	0,9770	0,8770

Frequência (Hz)						
L (m)	Barra Comprimida		Barra Tracionada		Barra como Viga	
	Resultado experimental	Modelo matemático simplificado	Resultado experimental	Modelo matemático simplificado	Resultado experimental	Modelo matemático simplificado
0,80	0,3662	0,4946	0,9770	1,0075	0,9520	0,7950
0,85	0,3052	0,4011	0,9520	0,9414	0,8790	0,7250
0,90	-	-	0,8790	0,8845	0,8300	0,6650

É possível afirmar que os ensaios realizados validaram o modelo analítico. A média dos resultados para o esforço de compressão, tração e para a ausência do esforço normal, entre os resultados experimentais e o modelo matemático, foram 8,69%, 3,41%, e 7,35%, respectivamente. É importante destacar que os modelos mais longos, nos ensaios de compressão e para a ausência do esforço normal, apresentaram uma configuração inicial, ou seja, antes de sua entrada em movimento, que se situa fora das hipóteses assumidas no modelo matemático. Descartando-se, portanto, os resultados experimentais para esses modelos, a média das diferenças entre os resultados experimentais e matemáticos, reduzem-se ao entorno de 3%.

Uma breve comparação com o trabalho de Yaman (2007) também conduz a uma conclusão satisfatória quanto à formulação apresentada neste trabalho. Enquanto Yaman (2007) obtém a frequência de 3,2532 para o seu modelo quando a inclinação da barra é nula, com a formulação desenvolvida neste artigo, encontra-se 3,2840, uma diferença menor que 1%. Calculando o parâmetro para inclinações de 0 e 90°, com a relação de 5, por exemplo, Yaman (2007) encontra 0,87002 e 0,82337. Com a expressão desenvolvida neste artigo chega-se 0,87358 e 0,82627. Análises para valores intermediários de inclinação podem ser desenvolvidas decompondo-se a força normal  $N(x)$  da Fig.1 segundo a direção da tangente à curvatura da barra.

Em outro trabalho, Wahrhaftig (2007) realiza uma simulação numérica por meio do Método dos Elementos Finitos, usando a matriz de rigidez geométrica como apresentada por Cook (2002), e verificou boa aderência aos resultados apresentados neste trabalho.

Estudos estão sendo realizados para o emprego da Eq. (19) no cálculo da frequência de estruturas reais, que possuem propriedades geométricas variando ao longo de seu comprimento. Para esses casos, os resultados revelam que é possível utilizar Eq. (19), com algum critério de ponderação para a geometria, precedida por um fator de correção. Esses estudos serão apresentados em um futuro artigo.

## Vibration of bars in small range including geometric effect

### Abstract

In engineering a large number of structures may be modeled as cantilevers. Due to their intrinsic characteristics some of these structures are sensitive to actions of a dynamic nature. Gusts of wind are excitations of a dynamic nature upon which the fundamental frequency of vibration is an important factor for the calculation of the structural response. Taking into account the effect of the axial force upon the natural frequencies of a structure usually leads towards systems of differential equations of unviable solution from the engineer's practical point of view. This article develops a simple mathematical expression for the calculation of the fundamental frequency of balanced structures in small ranges and takes into account the presence of the axial demand. This expression has been validated by dynamic laboratory testing.

**Key words:** Structural Dynamics, Geometric Non Linearity, Virtual Works, Experimental Investigation, Natural Frequencies of Vibration.

## Referências

AqDADOS 7.02. **Programa de aquisição de sinais:** manual do usuário, rev 7. Lynx Tecnologia Eletrônica Ltda. São Paulo, set. 2003.

AqDANALYSIS 7. **Program of analysis of signals:** manual of the user, rev 6. Lynx Electronic Technology. São Paulo, Oct. 2004.

BIANCOLINI, M. E.; BRUTTI, C.; RECCIA, L. Approximate solution for free vibrations of thin orthotropic rectangular plates. **Journal of Sound and Vibration**, v. 288, n. 1-2, p. 321-344, Nov. 2005.

BRÜEL & KJAER. **Accelerometers & conditionings.** Product Catalogue Feb. 2005. [Nærum - Denmark]. 2005.

CARNEIRO, F. L. **Análise dimensional e teoria da semelhança e dos modelos físicos.** 2. ed. Rio de Janeiro: Ed. URFJ, 1996.

CHEUNGA, Y. K.; ZHOU, D. Vibration of tapered Mindlin plates in terms of static Timoshenko beam functions. **Journal of Sound and Vibration**, v. 260, n. 4, p. 693-709, Feb. 2003.

CHIBA, M.; SUGIMOTO, T. Vibration characteristics of a cantilever plate with attached spring-mass system. **Journal of Sound and Vibration**, v. 260, n. 2, p. 237-263, Feb. 2003.



CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamic of structures**. 2. ed. Taiwan: McGraw Hill International Editions, 1993.

COOK R. D.; PLESHA, D. S.; WITT, M. R. J. **Concepts and applications of finite element analysis**. New York: John Wiley & Sons, 2002.

GAMBHIR, M. L. **Stability analysis and design of structures**. Patiala, India: Springer, 2004.

HU, X. X. et al. Fundamental vibration of rotating cantilever blades with pre-twist. **Journal of Sound and Vibration**, v. 271, n. 1-2, p. 47-66, Mar. 2004.

KANDASAMY, Selvakumar; SINGH, Anand V. Free vibration analysis of skewed open circular cylindrical shells. **Journal of Sound and Vibration**, v. 290, n. 3-5, p. 1100-1118, Mar. 2006.

LAURA P. A. A.; MASIÁB, U.; AVALOS, D. R. Small amplitude, transverse vibrations of circular plates elastically restrained against rotation with an eccentric circular perforation with a free edge. **Journal of Sound and Vibration**, v. 292, n. 3-5, p. 1004-1010, May, 2006.

LEISSA A. W. The historical bases of the Rayleigh and Ritz methods. **Journal of Sound and Vibration**, v. 287, n. 4-5, p. 961-978, Nov. 2005.

RAYLEIGH, L. **Theory of sound**. New York: Dover Publications. 2 v. Re-issued 1945.

RUTEMBERG, A. Simplified P-Delta analyses for asymmetric structures. **Journal of the Structural Division**, New York, v. 108, n. ST9, 1982.

TEMPLE, G.; BICKLEY, W. G. **Rayleigh's principle and its applications to engineering**. London: Humphrey Milford; Oxford University Press, 1933.

TIMOSHENKO, S. P.; Gere, J. M. **Theory of elastic stability**. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1961.

WAHRHAFTIG, A., BRASIL, R., BALTHAZAR J., **An evaluation of the nonlinear dynamic behavior of slender cellular phone poles under random wind excitation**. CMNE/CILANCE, Porto, 2007, CD ROM Proceedings, 2007.

WAHRHAFTIG, A. M. ; BRASIL, R. M.L. R. F. An evaluation of the nonlinear dynamic behavior of slender cellular phone towers under random wind excitation. In: EVACES'07 - International Conference on Experimental Vibration Analysis for Civil Engineering Structures, Porto, 2007.

WILSON, E. L.; HABIBULLAH, A. Static and dynamics analysis of multi-story buildings, including p-delta effects. **Earthquake spectra**, v. 3, n. 2, 1987.

YAMAN, M. Adomian decomposition method for solving a cantilever beam of varying orientation with tip mass. **J. Comput. Nonlinear Dynamic**, v. 2, n. 1, Jan. 2007.

## Agradecimentos

Os autores expressam seus agradecimentos pelo apoio dado pela CAPES e CNPq, ambas agências brasileiras de fomento. Agradecem também à agência de fomento à pesquisa do Estado de São Paulo, FAPESP.

### Correspondência

**ALEXANDRE DE M. WAHRHAFTIG**  
**Rua Artesão João da Prata nº 154 - Apto 203-B -**  
**Edf. Spazio Cidade - Itaigara**  
**41815-210 - Salvador - Bahia**  
**alixa@ufba.br**

*Recebido em 24.02.2010*

*Aprovado em 25.04.2011*

