



ARTIGO

 <https://doi.org/10.47207/rbem.v4i01.17273>

Uma análise dos obstáculos epistemológicos e didáticos em tarefas sobre as transformações trigonométricas

OLIVEIRA, Geane Santana

Universidade Federal de Sergipe (UFS). Professora da Educação Básica do estado de Sergipe (SEDUC/SE). Mestra em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIMA/UFS). ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6925-1025>. E-mail: geanesanoli@gmail.com.

FONSECA, Laerte Silva da

Instituto Federal de Sergipe (IFS). Professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Sergipe (UFS). Pós-Doutorado. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0215-0606>. E-mail: laerte.fonseca@uol.com.br.

Resumo: Este estudo objetivou a apresentação de uma análise dos obstáculos epistemológicos e didáticos em relação ao objeto de conhecimento transformações trigonométricas, ao observar as tarefas presentes no livro didático disponível no PNLEM 2021. Esta pesquisa foi caracterizada como um levantamento bibliográfico, baseada nos princípios de Bachelard (2006). Para justificar a escolha do livro didático "Matemática e suas tecnologias" de Souza (2021), realizou-se um levantamento no Guia do Plano Nacional do Livro Didático (PNLEM/2021), bem como uma análise cronológica do PNLEM de 2006 a 2021, com o intuito de verificar se as transformações trigonométricas foram abordadas desde o início da implementação do PNLEM e se ainda continuam evidenciadas no Guia atual de 2021, após implementação da Base Nacional Comum Curricular/BNCC (2018). Por meio dessa análise constatou-se que o objeto de conhecimento supracitado deixou de ser abordado na maioria dos livros didáticos a partir do PNLEM 2018, conforme proposto pelos documentos normativos nacionais PCNEM (2000), OCEM (2006) e BNCC (2018), ao discutir que esse saber matemático não atendia ao conjunto de habilidades a serem desenvolvidas no ensino de Matemática na Educação Básica. Assim, apenas um material didático aborda esse conteúdo em questão, propondo tarefas com a possibilidade de consolidar parcialmente a aprendizagem do aluno, sendo necessário repensar uma proposta de aprendizagem que possibilite a compreensão e importância do estudo das transformações trigonométricas na Educação Básica, com o intuito de superar os obstáculos epistemológicos e didáticos.

Palavras-chave: obstáculos epistemológicos, livro didático, transformações trigonométricas.

An analysis of epistemological and didactic obstacles in tasks on trigonometric transformations

Abstract: This study aimed to present an analysis of the epistemological and didactic obstacles in relation to the object of knowledge trigonometric transformations, by observing the tasks present in the textbook available at PNLEM 2021. This research was characterized as a bibliographical survey,

based on Bachelard's principles (2006). To justify the choice of the textbook "Mathematics and its technologies" by Souza (2021), a survey was carried out in the National Textbook Plan Guide (PNLEM/2021), as well as a chronological analysis of the PNLEM from 2006 to 2021, with the aim of verifying whether trigonometric transformations have been addressed since the beginning of the implementation of the PNLEM and whether they are still evident in the current 2021 Guide, after implementation of the National Common Curricular Base/BNCC (2018). Through this analysis, it was found that the aforementioned object of knowledge was no longer addressed in most textbooks from PNLEM 2018 onwards, as proposed by the national normative documents PCNEM (2000), OCEM (2006) and BNCC (2018), while discuss that this mathematical knowledge did not meet the set of skills to be developed in teaching Mathematics in Basic Education. Therefore, only one teaching material addresses this content in question, proposing tasks with the possibility of partially consolidating the student's learning, making it necessary to rethink a learning proposal that enables the understanding and importance of the study of trigonometric transformations in Basic Education, with the aim of to overcome epistemological and didactic obstacles.

Keywords: epistemological obstacles, textbook, trigonometric transformations.

Un análisis de los obstáculos epistemológicos y didácticos identificados en tareas sobre transformaciones trigonométricas

Resumen: Este estudio tuvo como objetivo presentar un análisis de los obstáculos epistemológicos y didácticos en relación con las transformaciones trigonométricas del objeto de conocimiento, mediante la observación de las tareas presentes en el libro de texto disponible en el PNLEM 2021. Esta investigación se caracterizó por ser un levantamiento bibliográfico, basado en los principios de Bachelard (2006). Para justificar la elección del libro de texto "Las Matemáticas y sus tecnologías" de Souza (2021), se realizó una encuesta en la Guía del Plan Nacional de Libros de Texto (PNLEM/2021), así como un análisis cronológico del PNLEM de 2006 a 2021, con el objetivo de verificar si las transformaciones trigonométricas han sido abordadas desde el inicio de la implementación del PNLEM y si aún son evidentes en la actual Guía 2021, luego de la implementación de la Base Curricular Común Nacional/BNCC (2018). A través de este análisis, se encontró que el objeto de conocimiento antes mencionado dejó de ser abordado en la mayoría de los libros de texto a partir del PNLEM 2018 en adelante, como lo proponen los documentos normativos nacionales PCNEM (2000), OCEM (2006) y BNCC (2018), mientras se discute que estos conocimientos matemáticos no cumplían con el conjunto de habilidades a desarrollar en la enseñanza de la Matemática en la Educación Básica. Por lo tanto, sólo un material didáctico aborda este contenido en mención, proponiendo tareas con posibilidad de consolidar parcialmente el aprendizaje del estudiante, por lo que es necesario repensar una propuesta de aprendizaje que posibilite la comprensión y la importancia del estudio de las transformaciones trigonométricas en la Educación Básica, con la objetivo de superar obstáculos epistemológicos y didácticos.

Palavras-Clave: obstáculos epistemológicos, libro de texto, transformaciones trigonométricas.

Introdução

Um dos maiores desafios para o professor em sala de aula é proporcionar um ensino na Matemática que não esteja atrelado às resoluções de tarefas mecânicas, se apropriando de

fórmulas, identidades e teoremas decorativos, pois não consolida de forma satisfatória o saber matemático. Isso porque, o aluno estará condicionado a desenvolver uma habilidade a ser aplicada por determinado momento da aprendizagem, mas não possibilitará a aquisição do conhecimento apenas pelo processo de memorização.

Os documentos normativos nacionais, a exemplo da Orientação Curricular para o Ensino Médio de 2006 (OCEM, 2006), os Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio de 2000 (PCNEM, 2000) e a Base Nacional Comum Curricular de 2018 (BNCC, 2018) orientam que o ensino da Matemática esteja associado ao cotidiano do aluno.

A OCEM (2006) afirma que a escola de hoje não pode explorar apenas objetos de conhecimento com resolução de problemas mecânicos, exigindo a memorização de fórmulas, mas é imprescindível uma integração de todos componentes curriculares no contexto escolar, para atingir um amplo espectro de competências e habilidades, relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e, também, à contextualização sociocultural.

Ao observar esses documentos normativos ficou evidente que alguns saberes matemáticos a exemplo das identidades das transformações trigonométricas para $\sin(a + b)$ e $\cos(a + b)$, que tanto exigem dos alunos para serem memorizadas, foram suprimidos, por serem considerados um ensino mecânico não essencial para aprendizagem matemática. Vale destacar que o ensino por memorização está relacionado ao processo de aprendizagem pelo qual o aluno é detentor do conhecimento transmitido pelo professor, reproduzindo fielmente o que foi apreendido por meio da resolução de tarefas.

De acordo com Freire (2008), nesse modelo de ensino mecânico o professor é um depositador, que explica o objeto de conhecimento sem provocar a participação ativa dos alunos e sem permitir a eles assumir “o papel do sujeito da produção de sua inteligência do mundo e não apenas o de receptor da que lhe seja transferida pelo professor” (Freire, 2008, p. 124).

Por outro lado, o ensino e aprendizagem das transformações trigonométricas é essencial para o cálculo de limites trigonométricos no momento de eliminar indeterminações intrínsecas, além de ser possível ver sua aplicabilidade no cotidiano. Como afirma Fonseca (2015), as identidades desse objeto de conhecimento podem ser vistas para a compreensão dos fenômenos de comportamentos periódicos, os movimentos dos batimentos cardíacos, o som produzido pelas cordas vocais, etc.

Dessa maneira, destaca-se que o presente estudo é um recorte da pesquisa realizada no Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Federal de Sergipe (PPGECIMA/UFS). Sendo que o objetivo do referente estudo acadêmico foi propor uma Sequência Didática (SD) sobre as transformações trigonométricas que auxiliassem no cálculo de limites, com requisitos para despertar no aluno o mecanismo atencional *top-down*, sob a abordagem de uma análise da Organização Matemática, à luz da Teoria Antropológica do Didático, em tarefas presentes no livro didático de Souza (2021).

A SD surgiu de inquietações, que serão abordadas neste recorte de trabalho, a saber: o que revelam as pesquisas sobre as transformações trigonométricas no campo da Educação Matemática? Quais obstáculos epistemológicos foram encontrados a respeito das transformações trigonométricas? As transformações trigonométricas estão evidenciadas nos livros didáticos?

Ter respostas para esses questionamentos só foi possível ao realizar um estudo histórico, revisitando as obras de Eves (2004) e Boyer (1996), observando se há ou não obstáculos epistemológicos e didáticos a partir dos conceitos de Bachelard (1996). Além disso, a análise do livro didático selecionado no Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM 2021) foi crucial, para observar quais tipos de tarefas estão evidenciadas na exploração das transformações trigonométricas.

Diante desse contexto, este artigo caracterizado como um estudo bibliográfico tem por objetivo apresentar um estudo sobre os obstáculos epistemológicos e didáticos em relação ao objeto de conhecimento, transformações trigonométricas, por meio da análise de tarefas no livro didático disponível no PNLEM 2021, “Matemática e suas tecnologias” do autor Joamir Souza.

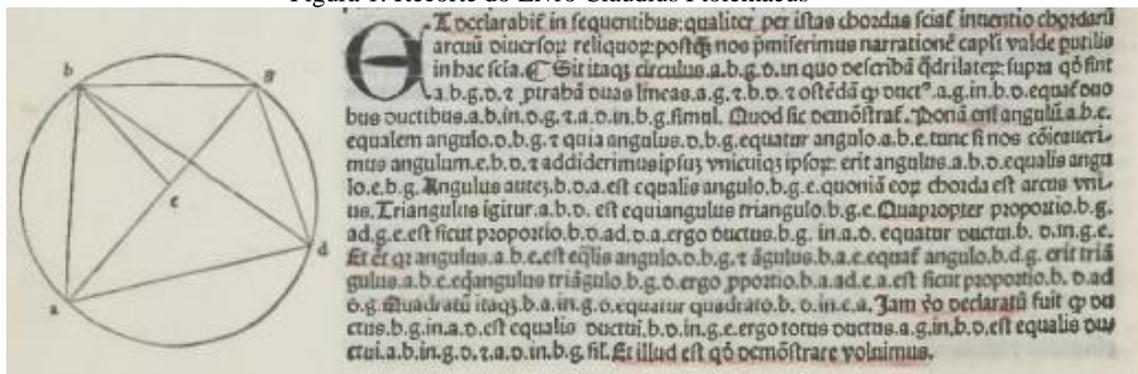
Realizar esse estudo faz parte da referida pesquisa do mestrado no PPGECIMA/UFS, pela necessidade de abordar um objeto de conhecimento, as transformações trigonométricas, que não está no topo da lista de saberes matemáticos a serem explorados no Ensino Médio, e que foram suprimidos do planejamento escolar matemático da Educação Básica. Outrora, sua abordagem é imprescindível para o estudo dos limites trigonométricos no Ensino Superior, tornando esse saber em tela relevante para o aluno na transição do Ensino Médio para o Superior ao ingressar nos cursos de exatas.

Aspecto histórico e epistemológico das transformações trigonométricas

As evidências bibliográficas sobre a origem das transformações trigonométricas são mínimas. Foi através dos estudos de Hiparco, considerado o pai da Trigonometria, que há vestígios de como as identidades desse objeto de conhecimento matemático surgiram. A tabela de cordas, por exemplo, foi criada por ele, sendo considerado um aspecto importante para o estudo da época. Boyer (1996, 2012), destaca que sua contribuição foi bastante significativa para a elaboração de uma das obras mais importantes no contexto histórico da Matemática, intitulada “Almagesto”¹ de Ptolomeu, onde é possível encontrar evidências dessas identidades.

A Figura 1 traz um recorte considerado uma evidencia de como Ptolomeu apropriou-se da tabela de cordas criada por Hiparco, utilizando a divisão sexagesimal dos babilônios na obtenção da tabela de cordas e através desse estudo, ele utilizou um teorema que recebe o seu nome, contido no Livro I do Almagesto, publicado em 1515 e escrito em Latim, o Teorema de Ptolomeu. Nela é possível observar um quadrilátero cíclico com suas diagonais e um segmento que dá suporte a essa figura geométrica, na qual é utilizado para a demonstração do mesmo se apropriando da semelhança de triângulos.

Figura 1: Recorte do Livro Claudius Ptolemaeus



Fonte: MOMATH, em <https://history-of-mathematics.org/artifacts/ptolemys-quadrilateral-theorem>, acesso em 28 mar. 2023.

¹ Almagesto que é uma obra dividida em 13 livros que tratam do plano do sistema solar, da tábua de cordas e alguns conceitos trigonométricos, do movimento do sol, da lua, da distância entre o sol e a lua, da construção do astrolábio, dos eclipses, das estrelas fixas catalogadas por Hiparco e da construção do globo terrestre.

Por meio da teoria de semelhança dos triângulos e vários procedimentos algoritmos, ou seja, utilizando os cálculos sexagesimais dos babilônios, Ptolomeu encontrou a soma e diferença de ângulos e uma tabela de cordas com mais precisão, como aponta Eves (2011), ao afirmar que o Livro I do Almagesto contém em meio a algum a tábua de cordas que dá suporte para a construção desse teorema.

O Livro I contém, em meio a algum material astronômico preliminar, a tábua de cordas mencionada acima, acompanhada de uma explanação sucinta da maneira como ela foi obtida a partir da fértil proposição geométrica conhecida como Teorema de Ptolomeu: *num quadrilátero cíclico, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos dois pares de lados opostos* (Eves, 2011, p. 204).

A citação referendada afirma que dado um quadrilátero ABCD inscrito numa circunferência, tem que $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$, identidade conhecida pelo nome de Teorema de Ptolomeu. Esse teorema é uma evidência do possível surgimento das identidades trigonométricas, conhecidas como transformações trigonométricas (soma, subtração dos arcos seno, cosseno e tangente) propostas em livros didáticos como conhecemos atualmente.

Ao revisitar as obras de Eves (2011) e Boyer (1996, 2012) não foi possível identificar o surgimento e evolução das transformações trigonométricas. A evidência encontrada é que elas surgiram da necessidade de calcular comprimentos que apareciam na astronomia, se apropriando da tábua de cossenos. Por exemplo, a identidade que conhecemos como $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ é proveniente dessa tábua de cossenos e interpolações para encontrar $\cos(A+B) + \cos(A-B)$. Como afirma Boyer (1996), o referido teorema é aquele em que

um lado, digamos AD, é diâmetro do círculo. Então, se $AD = 2r$, temos $2r \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD$. Se fizermos arco $BD = 2\alpha$ e arco $CD = 2\beta$, então, $BC = 2r \cdot \sin(\alpha - \beta)$, $AB = 2r \cdot \sin(90^\circ - \alpha)$, $BD = 2r \cdot \sin \alpha$, $CD = 2r \cdot \sin \beta$ e $AC = 2r \cdot \sin(90^\circ - \beta)$. Esse teorema leva ao resultado $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$. Raciocínio semelhante leva à fórmula $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ e ao par análogo $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta$ (Boyer, 1996, p. 120).

Assim, a partir desse estudo histórico despertou-se o anseio em saber como as identidades das transformações trigonométricas são abordadas no ensino habitual, visto que, os documentos normativos nacionais não sugerem a exploração de saberes que se apropriam de identidades, necessitando ser decoradas mecanicamente na resolução de problemas. Nesse ínterim, o tipo de abordagem referendada torna-se um obstáculo no processo de ensino e aprendizagem no trato das identidades relacionadas às transformações trigonométricas.

Dessa maneira, um obstáculo será evidenciado quando o saber é transmitido de uma única forma, na qual o aluno só consegue manipular os procedimentos matemáticos da maneira como conheceu/aprendeu e não tem a percepção de outro método para resolver problemas.

Propor o ensino de maneira mecânica com teoremas e identidades prontas, com o passo a passo de como resolver determinada tarefa torna-se um obstáculo, pois não saber transitar de outra maneira na resolução interfere na aquisição de novos conhecimentos matemáticos. Dessa maneira, pode ser afirmado que o ensino não foi assimilado e sim decorado para a resolução mecânica de questões e a aquisição da aprendizagem matemática não ocorreu de maneira satisfatória.

Assim, a metodologia utilizada na exploração das transformações trigonométricas pode interferir no processo da aquisição do saber matemático. Os livros didáticos não evidenciam um contexto histórico, apresentando apenas suas identidades prontas e tarefas a serem resolvidas mecanicamente. Diante dessa premissa, é possível destacar três obstáculos epistemológicos (OB1, OB2, OB3) existem para esse objeto de conhecimento, apontadas no Quadro 1:

Quadro 1: Obstáculos identificados para o desenvolvimento das transformações trigonométricas.

MARCADOR	OBSTÁCULO (OB)
OB1	Não há associação das transformações trigonométricas com seu contexto histórico.
OB2	O uso das transformações trigonométricas como fórmula pronta.
OB3	Limitação das transformações trigonométricas na resolução de problemas.

Fonte: Os autores (2023).

De acordo com Bachelard (1996), esses obstáculos limitam o desenvolvimento da criatividade, da maneira de pensar a ciência e a formação do espírito científico.

No processo de ensino e aprendizagem da Matemática, por exemplo, quando o saber é transmitido e apreendido pelo aluno, é possível que ele consiga manipular apenas os mecanismos matemáticos como conheceu/aprendeu, não tendo a percepção de outro método na resolução de problemas, caracterizando, segundo Bachelard (1996) em um obstáculo, se não for superado.

Diante desse contexto, torna-se viável investigar como as transformações trigonométricas estão evidenciadas em pesquisas e livros didáticos, para saber se houve superação desses obstáculos.

Levantamento de pesquisas nas plataformas nacionais sobre as transformações trigonométricas

Ao realizar o mapeamento no banco de teses, dissertações e artigos nas plataformas nacionais, foi encontrado um artigo acadêmico sobre as transformações trigonométricas, intitulado “transformações trigonométricas: uma experiência de instrução programada” do autor Teixeira (1969). O referido artigo aborda apenas o uso desse objeto de conhecimento na resolução de tarefas.

O Quadro 2 traz o levantamento das pesquisas em ordem cronológica crescente sobre as transformações trigonométricas em plataformas nacionais, em que a sigla A é referente a artigos e D a dissertações, possuindo mais proximidade com o tema investigado nesta pesquisa.

Quadro 2: Levantamento de pesquisas nas plataformas nacionais com mais proximidade do tema investigado

Autor (a) e Instituição		Título da pesquisa
A1	Teixeira (1969)	Transformações Trigonométricas – uma experiência de instrução programada.
D3	Lopes (2014)	Aplicando o Teorema de Ptolomeu a alunos da rede pública.
D2	Silva (2016)	Teorema de Casey: uma generalização do Teorema de Ptolomeu para quadriláteros inscritíveis.
D1	Filho (2016)	O Teorema de Ptolomeu e aplicações.
A2	Corrêa; Gomes (2020)	Teorema de Ptolomeu: história, demonstração e validação via GeoGebra.

Fonte: Os autores (2023)

O estudo de Teixeira (1969) traz a abordagem referente ao ensino das transformações trigonométricas em turmas do 2º colegial no ano de 1969, época em que o referido autor atuava como docente, sendo que o objetivo da pesquisa foi mostrar como as identidades das transformações trigonométricas são demonstradas, seguido de uma lista de atividades, intitulada “estudo programado” para aplicar as identidades na resolução de problemas.

O estudo de Teixeira (1969) foi realizado em quatro seções, contendo quatorze tarefas e três testes de controle, com o intuito de reforçar a assimilação das transformações trigonométricas se apropriando de um Teorema chamado de Teorema de Carnot, cujos resultados da aplicação com os alunos foram satisfatórios.

Ao analisar o estudo de Teixeira (1969) é possível observar que não houve superação de alguns obstáculos epistemológicos, pois não há associação das transformações trigonométricas com seu contexto histórico, além da limitação do referido objeto de conhecimento na resolução de problemas, sem evidenciar sua aplicabilidade no cotidiano.

Assim, o professor reforça a premissa de que existe apenas um método para explorar o objeto de conhecimento matemático, transmitindo o passo a passo de como resolver tarefas usando teoremas e identidades, sem recorrer a outras estratégias de ensino. Além disso, ele não recorre à origem histórica do estudo a ser transposto, o que desperta a falta de interesse na aprendizagem matemática e evidenciando um obstáculo que não será superado. De acordo com Bachelard (2006),

(...) os professores de ciências imaginam que o espírito científico começa à semelhança de uma lição, que é sempre possível refazer um estudo indolente repetindo uma aula, que é sempre possível fazer compreender uma demonstração repetindo-a ponto a ponto (Bachelard, 2006, p. 168).

Diante desse contexto, vale destacar que o método mecânico de resolver tarefas no ano de 1969 é tão semelhante quanto ao referido ano em que esta pesquisa foi realizada, em 2023, evidenciando um obstáculo não superado, ou seja, o de explorar o saber matemático passo a passo e reproduzi-lo fielmente como foi transmitido, acreditando assim, que o aluno adquiriu as habilidades necessárias para o objeto de conhecimento em estudo.

É notável que o estudo de Teixeira (1969), única pesquisa encontrada em plataformas de pesquisas nacionais a respeito das transformações trigonométricas, pode ser considerado

satisfatório para o ano de sua publicação, mas que para o momento atual a referida pesquisa não tem muita estrutura e embasamento teórico com o intuito de reforçar a aplicação dessa investigação científica em campo.

Nesse cenário de escassez em pesquisas sobre as transformações trigonométricas, no campo da Educação Matemática, foi justificável traçar um estudo a respeito dessa temática, tão necessária no contexto escolar, pois esse objeto de conhecimento deve ser considerado um saber contínuo, já que remete a outros objetos como evocar o Teorema de Pitágoras, a semelhança de triângulos e os limites trigonométricos, podendo ser considerado uma base de conhecimento a ser consolidada pelo aluno, principalmente para aquele que está na transição do Ensino Médio para o Superior nos cursos da área de exatas.

Como dito, as transformações trigonométricas estão no topo dos objetos de conhecimento suprimidos do planejamento de ensino matemático. Como destaca a OCEM (2006), “alguns tópicos usualmente presentes no estudo da trigonometria podem ser dispensados, como, por exemplo, as outras três razões trigonométricas, as fórmulas para $\text{sen}(a + b)$ e $\text{cos}(a + b)$, que tanto exigem dos alunos para serem memorizadas” (Brasil, 2006, p. 74).

Esse cenário de recusa para o objeto de conhecimento transformações trigonométricas traz a tona a curiosidade de observar como os livros didáticos evidenciam esse saber em tela, se disponíveis. Assim, nesta pesquisa será apresentado o recorte da pesquisa realizada no Mestrado sobre o levantamento de livros didáticos aprovados no PNLEM no período de 2006 (1º Guia do livro didático a ser implementado) a 2021 (Guia do Livro Didático mais recente).

O livro didático como recurso no processo de ensino e aprendizagem das transformações trigonométricas

O livro didático é um recurso imprescindível na prática docente, como afirma Luckesi (2004, p. 27), "o livro didático é um meio de comunicação, através do qual o aluno recebe a mensagem escolar". De acordo com Bittencourt (1997),

o livro didático é um depositário dos conteúdos escolares, suporte básico e sistematizador privilegiado dos conteúdos elencados pelas propostas curriculares são por seu intermédio que são passados os conhecimentos e técnicas consideradas fundamentais de uma sociedade em determinada

época. O livro didático realiza uma transposição do saber acadêmico para o saber escolar no processo de explicitação curricular (Bittencourt, 1997, p.72).

Esse material pedagógico dialoga com o professor e o aluno, trazendo uma gama de orientações para que o professor conduza de forma sistemática os saberes a ser ensinado em sala de aula. Costa e Allevato (2010), destaca que ele “é um interlocutor, isto é, um componente que dialoga tanto com o professor quanto com os alunos”. Além de possibilitar um aspecto dialógico, ele é um auxílio importante para o planejamento do docente, como afirma Dante (1996), esse recurso fornecerá o suporte para quem ensina, visto que

só a aula do professor não consegue fornecer todos os elementos necessários para a aprendizagem do aluno, uma parte deles com problemas, atividades e exercícios pode ser coberta recorrendo-se ao livro didático (Dante, 1996, p.63).

Nesta pesquisa foi realizada uma trajetória cronológica sobre a abordagem das transformações trigonométricas em materiais didáticos para o Ensino Médio durante o período de 2006 a 2021, e posteriormente selecionou-se o material mais recente para analisar as tarefas, que serviriam de apoio para a construção da SD na pesquisa de mestrado desta autora. Além disso, foi possível observar que nos documentos normativos nacionais não há um enfoque quanto à exploração dos objetos de conhecimento que remetem o uso de identidades mecânicas na resolução de problemas, por não priorizarem a aplicabilidade desses saberes no cotidiano do aluno.

Diante desse contexto, surge a inquietação de investigar em qual momento a abordagem das transformações trigonométricas foi interrompida nos livros didáticos, e na possibilidade de ainda existir, como esse objeto de conhecimento é apresentado ao professor para explorar com os alunos em sala de aula. Para ter essas respostas evidencia-se nesta pesquisa um levantamento feito no PNLEM entre os anos de 2006 a 2021, com o propósito de encontrar vestígios desse objeto do conhecimento nos materiais elencados para o Ensino Médio.

Vale destacar que até meados de 2003 o aluno do Ensino Médio não tinha livro didático. Para estudar o conteúdo programático proposto pela rede de ensino, era necessário adquirir um material impresso ou copiado no quadro, o que dificultava o trabalho do professor

em sala de aula por questões financeiras para o aluno adquirir o material ou a perda de tempo em transpor o objeto de conhecimento escrito na lousa. Assim, o PNLEM foi implementado em 2005 com o objetivo de dar esse suporte pedagógico no planejamento de aulas do docente.

O primeiro levantamento realizado na pesquisa de Mestrado desta autora a respeito da abordagem das transformações trigonométricas foi realizado no PNLEM de 2006, primeiro Guia para o Ensino Médio com obras aprovadas para a apreciação e escolha do professor sobre qual material trabalhar em sala de aula.

No PNLEM referente a 2006, de um total de onze livros didáticos propostos, oito materiais apontam em seu sumário a proposta do estudo desse objeto do conhecimento. No Guia do PNELEM 2009, de oito exemplares apresentados, apenas três deles contemplam as transformações trigonométricas.

No PNLEM 2012 são sete livros didáticos, na qual cinco apresentam em seus sumários o objeto de conhecimento em estudo. Já no ano de 2015 dos seis livros didáticos apresentados no Guia, somente um exemplar não aborda as transformações trigonométricas.

Em relação ao PNLEM 2018, observa-se um número menor de livros didáticos abordando as transformações trigonométricas, um quantitativo total de oito obras, na qual apenas três abordam esse objeto de conhecimento.

É notório observar que essa queda expressiva na abordagem das transformações trigonométricas está associada às orientações discutidas nos documentos normativos nacionais, que sugerem a abordagem de um ensino que não seja mecânico e sem associação com o cotidiano do aluno e por esse motivo podem ser dispensados (Brasil, 2006, p. 74).

O PNLEM 2021, é o Guia atual com livros didáticos aprovados para a escolha do professor, na qual apenas uma obra, da coleção referente ao ano supracitado, contempla as transformações trigonométricas de um total de dez exemplares. Assim, na pesquisa de Mestrado realizou-se a análise desse material intitulado “Matemática e suas tecnologias” do autor Joamir Souza, que possui seis volumes: conjunto e função afim, funções e suas aplicações, sequências e trigonometria, matemática financeira, gráficos e sistemas, geometria, estatística e probabilidades. O Guia do livro didático deixa claro que o professor tem autonomia para explorar a temática do material conforme a realidade dos alunos em sala de aula (PNLEM, 2021).

Por conta dessa assertiva, para justificar a análise cronológica das transformações trigonométricas no PNLEM de 2006 a 2021, o objetivo dessa análise foi observar se esse objeto do conhecimento deixou de ser explorado, por se apropriar de uma identidade que auxilia na resolução de tarefas consideradas mecânicas, com memorização de identidades e teoremas, principalmente após a implementação da BNCC (2018). Assim, ficou evidente nessa cronologia que a exploração desse objeto de conhecimento foi decrescendo principalmente a partir de 2018, ano em que a BNCC estava sendo discutida.

Como já mencionado, no PNLEM 2021 só foi observado apenas um material didático, Souza (2021), explorando as transformações trigonométricas. Dessa maneira, como se evidencia as tarefas nesse material didático? Será que a abordagem de ensino supera os obstáculos epistemológicos?

Ao analisar Souza (2021), é destacada uma breve demonstração da soma e subtração de arcos seno por meio de uma representação geométrica, com ausência de uma abordagem histórica sobre as transformações trigonométricas, sem propor uma metodologia que fuja do processo mecânico da resolução de tarefas que se apropriam das identidades desse objeto de conhecimento. Por outro lado, as tarefas propostas por Souza (2021) possibilitam a consolidação do saber matemático, ao proporcionar uma contextualização do problema e permitir que o aluno transite entre as diversas representações de um objeto de conhecimento.

Na Figura 2 é apresentada a proposta de tarefa em Souza (2021) para calcular os arcos do seno, cosseno e tangente dos ângulos se apropriando das identidades das transformações trigonométricas (soma e subtração dos arcos seno, cosseno e tangente). Assim, esse tipo de tarefa solicita a resolução mecânica, não consolidando a total aprendizagem do objeto de conhecimento.

Figura 2: Tarefa utilizando a transformação trigonométrica

26. Calcule.	
a) $\sin 135^\circ$	c) $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}$
b) $\cos 75^\circ$	d) $\operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}$

Fonte: SOUZA, 2021, p.118.

Figura05: Tarefa utilizando a transformação trigonométrica

29. Em dois momentos diferentes de um dia ensolarado, as sombras projetadas por um poste de 12 m de altura tinham 12 m e $12\sqrt{3}$ m de comprimento, conforme representado no esquema a seguir. Determine a medida do ângulo α indicado nesse esquema.

Fonte: SOUZA, 2021, p.118.

A tarefa 6 é considerada pouco satisfatória para a consolidação da aprendizagem, mas envolve a evocação de outros saberes como resolver uma equação trigonométrica e da equação do 1º grau, se apropriando do novo conhecimento que é a soma de dois arcos cosseno.

Figura 6: Tarefa utilizando a transformação trigonométrica

30. Considere a equação $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ e resolva os itens a seguir.

a) Para quais valores de medidas angulares x essa equação é satisfeita?

b) Represente, no ciclo trigonométrico, os pontos que podem ser associados às extremidades de arcos de medida angular x .

Fonte: SOUZA, 2021, p.118.

A próxima tarefa proposta por Souza (2021), Figura 7, envolve procedimento mecânico e evoca um saber já explorado que são as progressões geométricas, sendo considerada uma tarefa pouco satisfatória.

Figura 7: Tarefa utilizando a transformação trigonométrica

31. Seja $q = \sin^2 \frac{\pi}{4}$ a razão de uma progressão geométrica infinita cujo primeiro termo é $a_1 = \cos \frac{\pi}{4}$. Determine o limite da soma dos termos dessa PG.

Fonte: SOUZA, 2021, p.118.

Diante da análise das tarefas de Souza (2021) evidenciou-se a maneira como as tarefas são apresentadas, pois requer o uso da memorização de identidades, tanto do novo saber (as identidades das transformações trigonométricas) quanto de objetos do conhecimento em outras etapas do ensino, sendo essenciais para a desenvoltura satisfatória na resolução das mesmas. Vale destacar que apenas uma tarefa traz uma contextualização para resolver o que é solicitado na tarefa.

De acordo com a análise dessas tarefas, fica evidente o apontamento de obstáculos epistemológicos na maneira como as transformações trigonométricas são abordadas. Visto que, elas não trazem um contexto histórico desse objeto de conhecimento e propõe o procedimento mecânico para sua resolução, sendo consideradas pouco satisfatórias na aquisição da aprendizagem desse objeto do conhecimento matemático.

Considerações finais

O presente estudo teve por objetivo apresentar um estudo sobre os obstáculos epistemológicos e didáticos em relação ao objeto de conhecimento transformações trigonométricas, por meio da análise de tarefas no livro didático, “Matemática e suas tecnologias” do autor Joamir Souza, disponível no PNLEM 2021.

Quando um saber é explorado em sala de aula e o aluno resolve apenas a tarefa da maneira como aprendeu, por um método mecânico de resolução com decoração de fórmulas e teoremas, estamos diante de um entrave na aprendizagem, ou seja, de um obstáculo não superado, que não permite consolidar a construção do novo conhecimento matemático, dando a entender que a cabeça desse estudante, nas palavras de Bachelard (1996) é infelizmente fechada, por não possibilitar diversas estratégias para resolver determinadas tarefas.

No levantamento do PNLEM 2006 a 2021 para saber se no campo da Trigonometria as transformações trigonométricas estavam evidenciadas no sumário, foi constatado que até 2015 elas eram propostas como objeto de conhecimento a serem exploradas pelo professor. Sendo que até o referido ano, o ensino de Matemática era proposto de maneira mecânica e menos contextualizado, possibilitando a abordagem de objetos de conhecimento que se apropriavam de identidades na Trigonometria na resolução de problemas.

A partir do PNLEM 2018, houve uma queda significativa na proposta de exploração das transformações trigonométricas em sala de aula e o que pode justificar esse cenário de interrupção está atrelado ao que os documentos normativos nacionais enfatizam a respeito desse conhecimento, considerado engessado por se apropriar de identidades consideradas memorizáveis, não consolidando o saber matemático. A OCEM (2006) afirma que, essas identidades exigem muito do aluno para serem memorizadas no trato da resolução de problemas.

Ao analisar as tarefas do livro didático de Silva (2021), foram identificados obstáculos referentes ao processo mecânico de resolução, com repetição de identidades das transformações trigonométricas (soma e subtração de arcos seno e cosseno), sem trazer um contexto histórico, sendo que apenas uma delas evidencia a contextualização do cotidiano para a resolução do problema. Dessa maneira, de acordo com os resultados dessa análise, observa-se que as tarefas em Silva (2021) não superam os obstáculos, por não possuírem requisitos suficientes na aquisição desse saber em tela.

Diante disso, é preciso repensar tarefas que possam superar esses obstáculos, na qual o aluno transite por todas as possibilidades de resoluções, sem apego à memorização de algoritmos, trazendo um contexto histórico e situações cotidianas. Isso porque, as transformações trigonométricas possibilitam a revisitação de outros objetos de conhecimento, a exemplo das operações numéricas com os números racionais e irracionais, o uso do Teorema de Pitágoras em problemas contextualizados, equações do 1º e 2º grau. Em outras palavras, rever outros saberes para a construção do novo conhecimento torna-se significativo na aprendizagem matemática.

Assim, vale destacar que as transformações trigonométricas poderiam ser evidenciadas nos livros didáticos e abordadas no processo de ensino e aprendizagem, não sendo suprimidas da grade curricular de objetos de conhecimento tidos como “essenciais” para que o aluno

desenvolva as competências e habilidades a serem adquiridas na Educação Básica, sendo importantes para o aluno que ingressará em cursos de exatas do Ensino Superior.

Diante desse contexto, apresentar uma abordagem histórica, epistemológica e didática das transformações trigonométricas é importante para que o professor compreenda a necessidade de trazer o contexto histórico na explanação dos objetos de conhecimento, antes de introduzir os conceitos, seguidos da resolução de problemas, pois proporcionará ao aluno o interesse de se envolver mais no processo de aprendizagem, de modo a superar obstáculos que possam existir e precisam ser superados na transmissão do saber matemático.

Referências

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**. Tradução de Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto Editora, 1996.

BITTENCOURT, C. M. **Livros didáticos: concepções e uso**. Recife: Secretaria da Educação e Esporte de Pernambuco, 1997. (Coleção Qualidade do Ensino, Série: Formação do Professor).

BOYER, C. B. **História da matemática**. Trad. Elza Furtado Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: volume 2 – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/SEB, 2006.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/SEMT, 2000.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio: PCN+ – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/SEMT, 2006.

BRASIL. **Guia de livros didáticos: PNLD 2018: matemática: ensino médio**. –Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2018.



BRASIL. **Guia de livros didáticos: PNLEM 2006: matemática: ensino médio.** –Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.

BRASIL. **Guia de livros didáticos: PNLEM 2009: matemática: ensino médio.** –Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2009.

BRASIL. **Guia de livros didáticos: PNLEM 2012: matemática: ensino médio.** –Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2012.

BRASIL. **Guia de livros didáticos: PNLEM 2015: matemática: ensino médio.** –Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2015.

BRASIL. **Guia de livros didáticos: PNLEM 2018: matemática: ensino médio.** –Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2018.

CHEVALLARD, Y. **Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: L’approche anthropologique.** Cours donné à l’université d’été Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, La Rochelle, 4-11; paru dans les actes de cette université d’été, IREM de Clermont-Ferrand, p. 91-120. 1998. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php?id_article=27. Acesso em: 14 nov. 2021

COSTA, M. S.; ALLEVATO, N. S. G.. **Livro didático de matemática: análise de professoras polivalentes em relação ao ensino de geometria.** Vidya, Santa Maria, v. 30, n. 2, p. 71 - 80, jul./dez. 2010.

DANTE, L. R. Livro didático de Matemática: uso ou abuso? In: **Em aberto.** Brasília, v.26, n.69, p.52 – 58, jan/marc. 1996.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Trad. Hygino Hugueros Domingues. Campinas: ed. UNICAMP, 2011.

FONSECA, L. S. **Um estudo sobre o Ensino de Funções Trigonométricas no Ensino Médio e no Ensino Superior no Brasil e França.** 2015. 495 f. (Tese de Doutorado) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2015.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia. Saberes necessários à prática educativa.** São Paulo: Editora Paz e Terra, 2008.

LUCKESI, C. C. **Filosofia da educação.** São Paulo: Cortez, 1990.