REVISTA BAIANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

https://doi.org/10.47207/rbem.v7i1.26221

Modelos Matriciais de População Estruturada: Uma Experiência Didática no Ensino Médio

RONCETE, Israel Machado
Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT). Graduado em Licenciatura em Matemática (UNEMAT). ORCID: https://orcid.org/0009-0006-1037-2942. E-mail: israel.roncete@unemat.br.

ASSIS, Raul Abreu de
Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT). Doutor em Matemática Aplicada (UNICAMP). ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0473-9211. E-mail: raul.assis@unemat.br.

ASSIS, Luciana Mafalda Elias de
Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT). Doutora em Sistemas Complexos para as Ciências da Vida (Universidade de Estudos de Torino-IT - UNITO). ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7247-0429. E-mail: luciana.assis@unemat.br.

Resumo: Este artigo apresenta uma proposta didática desenvolvida no âmbito de um projeto de extensão universitária, baseada na aplicação de um modelo matricial estruturado para o estudo de dinâmicas populacionais. A atividade foi realizada por meio de uma oficina com estudantes do Ensino Médio e teve como objetivo promover a aprendizagem significativa dos conceitos básicos de matrizes, articulando teoria e prática por meio de uma abordagem contextualizada e computacional. Durante a oficina, os alunos foram introduzidos aos fundamentos da álgebra matricial, com ênfase na interpretação de matrizes como representações de sistemas dinâmicos. Em seguida, os participantes implementaram um modelo populacional estruturado em classes etárias utilizando o *software* Octave. A atividade permitiu aos estudantes compreender a evolução de uma população ao longo do tempo com base em taxas de transição entre classes e contribuições específicas de natalidade e mortalidade, promovendo a visualização e análise de dados por meio de simulações. Os resultados indicam que a proposta favoreceu o desenvolvimento do raciocínio lógico, a compreensão de conceitos matemáticos abstratos e a familiarização com recursos computacionais aplicados à modelagem. Além disso, observou-se um aumento no interesse dos estudantes pela Matemática ao perceberem sua aplicabilidade em contextos reais. Conclui-se que a utilização de modelos matriciais em ambientes de aprendizagem ativa, integrando conteúdo curricular, tecnologia e extensão universitária, configura-se como uma estratégia eficaz para o ensino de Matemática no Ensino Médio, contribuindo para a formação crítica e interdisciplinar dos alunos.
Palavras-chave: Modelagem Matemática. Modelo Estruturado. Matrizes. GNU Octave.

Matrix Models of Structured Population: A Didactic Experience in High School

Abstract: This article presents a didactic proposal developed within the scope of a university extension project, based on the application of a structured matrix model to study population dynamics. The activity was carried out through a workshop with high school students and aimed to promote meaningful learning of the basic concepts of matrices, combining theory and practice through a contextualized and computational approach. During the workshop, students were introduced to the fundamentals of matrix

algebra, with an emphasis on interpreting matrices as representations of dynamic systems. Subsequently, the participants implemented a population model structured by age classes using the Octave *software*. The activity enabled students to understand the evolution of a population over time based on transition rates between classes and specific contributions of birth and death rates, encouraging data visualization and analysis through simulations. The results indicate that the proposal fostered the development of logical reasoning, understanding of abstract mathematical concepts, and familiarity with computational tools applied to modeling. Furthermore, an increase in students' interest in mathematics was observed, as they recognized its applicability in real-world contexts. It is concluded that the use of matrix models in active learning environments integrating curricular content, technology, and university outreach proves to be an effective strategy for teaching mathematics in high school, contributing to students' critical and interdisciplinary development.
Keywords: Mathematical Modeling. Structured Model. Matrices. GNU Octave.

Modelos de Matrices de Población Estructuradas: Una Experiência de Enseñanza en la Escuela Secundaria

Resumen: Este artículo presenta una propuesta didáctica desarrollada basada en la aplicación de un modelo matricial estructurado para el estudio de dinámicas poblacionales. La actividad se llevó a cabo mediante un taller con estudiantes de educación secundaria y tuvo como objetivo promover el aprendizaje significativo de los conceptos básicos de matrices, articulando teoría y práctica a través de un enfoque contextualizado y computacional. Durante el taller, los alumnos fueron introducidos a los fundamentos del álgebra matricial, con énfasis en la interpretación de matrices como representaciones de sistemas dinámicos. Posteriormente, los participantes implementaron un modelo poblacional estructurado por clases etarias utilizando el *software* Octave. La actividad permitió a los estudiantes comprender la evolución de una población a lo largo del tiempo, basándose en tasas de transición entre clases y contribuciones específicas de natalidad y mortalidad, promoviendo la visualización y el análisis de datos mediante simulaciones. Los resultados indican que la propuesta favoreció el desarrollo del razonamiento lógico, la comprensión de conceptos matemáticos abstractos y la familiarización con herramientas computacionales aplicadas a la modelización. Además, se observó un aumento en el interés de los estudiantes por las matemáticas al percibir su aplicabilidad en contextos reales. Se concluye que el uso de modelos matriciales en entornos de aprendizaje activo, integrando contenido curricular, tecnología y extensión universitaria, constituye una estrategia eficaz para la enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria, contribuyendo a la formación crítica e interdisciplinaria del alumnado.
Palavras-Clave: Modelización Matemática, Modelo Estructurado, Matrices. GNU Octave.

Introdução

A modelagem Matemática tem se consolidado como uma abordagem eficiente para a compreensão de fenômenos reais, proporcionando aos estudantes uma visão mais concreta da aplicação dos conceitos matemáticos ao articular teoria, interpretação e tomada de decisões a partir de situações do mundo real (Bassanezi, 2002). No ensino de Álgebra Linear, o uso de

matrizes para representar e analisar sistemas dinâmicos é uma ferramenta poderosa, permitindo a exploração de modelos estruturados em diferentes contextos e favorecendo a compreensão de conceitos abstratos por meio de representações formais e computacionais (Perko, 2013). Nesse sentido, este trabalho apresenta uma experiência didática desenvolvida no âmbito de uma ação de extensão universitária, por meio da aplicação de uma oficina voltada para estudantes do Ensino Médio com o intuito de aproximar os conteúdos curriculares da Matemática de problemáticas socialmente relevantes.

A oficina teve como objetivo introduzir e explorar um modelo estruturado de crescimento populacional, utilizando dados da população brasileira fornecidos pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) (IBGE, 2025). A partir da organização da população em classes etárias e por gênero, os participantes foram incentivados a compreender como a estrutura etária influencia as projeções populacionais ao longo do tempo estabelecendo relações entre conceitos matemáticos, dados reais e interpretações sociais. Para isso, foram empregadas operações matriciais e conceitos fundamentais de Álgebra Linear, mais especificamente, de Matrizes, proporcionando uma abordagem prática e interativa para os estudantes. Nosso principal foco consistiu em estudar e aplicar os modelos discretos que são modelos em que o tempo é uma variável discreta, ou seja, dado um determinado fenômeno, analisamos a evolução do sistema em instantes isolados (como anos consecutivos), característica comum em fenômenos demográficos (Murray, 2002).

O desenvolvimento das atividades foi realizado com o apoio do *software* livre GNU Octave (GNU Octave, 2025), permitindo a implementação computacional do modelo e a análise dos resultados obtidos. O uso dessa ferramenta não apenas facilitou os cálculos envolvidos, mas também possibilitou a visualização das transformações matriciais e suas implicações na evolução da população ao longo das iterações do modelo contribuindo para a aprendizagem por meio da experimentação, da simulação e da análise gráfica.

Dessa forma, a oficina buscou integrar conceitos matemáticos com ferramentas computacionais, estimulando o pensamento analítico e o interesse dos alunos pelo estudo da Matemática por meio da Modelagem Matemática. A experiência descrita neste artigo evidencia a relevância de iniciativas desse tipo no contexto educacional, demonstrando como a Matemática pode ser utilizada para interpretar e prever fenômenos do mundo real de maneira

acessível e didática. O trabalho fundamenta-se teoricamente nos pressupostos da modelagem matemática, da aprendizagem significativa, do uso de tecnologias digitais no ensino e da extensão universitária, os quais são discutidos na seção seguinte.

O trabalho é finalizado com a apresentação de uma análise qualitativa, fruto de entrevistas e questionários aplicados durante a oficina.

Fundamentação Teórica

A experiência didática apresentada neste trabalho fundamenta-se em um conjunto de referenciais teóricos que, de forma integrada, sustentam a proposta desenvolvida. A Modelagem Matemática é assumida como uma abordagem pedagógica capaz de articular conceitos matemáticos e fenômenos reais, favorecendo a compreensão de conteúdos abstratos por meio da construção e análise de modelos. A Aprendizagem Significativa constitui o eixo pedagógico que orienta a organização das atividades, ao priorizar a relação entre novos conhecimentos e os saberes prévios dos estudantes, bem como a contextualização dos conteúdos trabalhados. O uso de Tecnologias Digitais no ensino, em especial de *softwares* matemáticos, é compreendido como um recurso mediador que potencializa a experimentação, a visualização e a análise dos modelos construídos. Por fim, a Extensão Universitária configura-se como o espaço formativo que possibilita a aproximação entre universidade e escola, integrando ensino, pesquisa e prática pedagógica. A seguir, esses eixos teóricos são discutidos de forma articulada, evidenciando sua relação com a metodologia adotada e com a experiência desenvolvida na oficina.

- **Modelagem Matemática no Ensino**

A Modelagem Matemática tem sido amplamente reconhecida como uma abordagem pedagógica que possibilita a articulação entre conteúdos matemáticos e situações oriundas da realidade, favorecendo a construção de significados e a compreensão de conceitos abstratos. No contexto educacional, a Modelagem não se limita à aplicação de técnicas matemáticas, mas envolve um processo investigativo que parte de um problema real, passa pela construção de representações matemáticas e culmina na análise e interpretação dos resultados obtidos (Bassanezi, 2002).

No ensino de Matemática, especialmente no estudo de matrizes e sistemas dinâmicos, a modelagem permite que os estudantes compreendam a função das estruturas matemáticas como ferramentas para descrever, analisar e prever fenômenos. Modelos estruturados de população possibilitam a representação da dinâmica demográfica por meio de matrizes de transição, evidenciando relações entre classes etárias, taxas de natalidade, mortalidade e envelhecimento populacional. Essa abordagem contribui para que os alunos percebam a Matemática como uma ciência aplicada e socialmente relevante, rompendo com uma visão excessivamente formal dos conteúdos.

Um outro referencial relevante para a compreensão da Modelagem Matemática no ensino é apresentado por Barbosa (2001), para quem a Modelagem Matemática constitui uma oportunidade para que os alunos indaguem diferentes situações por intermédio da Matemática, sem a adoção de procedimentos previamente fixados. Segundo o autor, a modelagem configura-se como "um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade" (Barbosa, 2001, p. 3). Essa concepção desloca o foco do ensino da mera aplicação de técnicas para um processo investigativo, no qual o estudante assume um papel ativo na construção do conhecimento.

Nessa mesma perspectiva, Kluber e Burak (2008, p.20) destacam que o interesse dos participantes e o envolvimento dos grupos na busca por dados do ambiente são elementos fundamentais para a atribuição de significado aos conceitos matemáticos. Segundo os autores, esse envolvimento contribui para o desenvolvimento da autonomia dos estudantes, tornando-os agentes do processo de construção do conhecimento matemático, aspecto central em propostas pedagógicas baseadas na modelagem.

Além disso, a Modelagem Matemática favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico, da capacidade de argumentação e da interpretação crítica de resultados. O uso de modelos discretos, nos quais o tempo é tratado como uma variável discreta, mostra-se particularmente adequado para a análise de fenômenos cujos dados são coletados periodicamente, como ocorre em estudos populacionais (Murray, 2002).

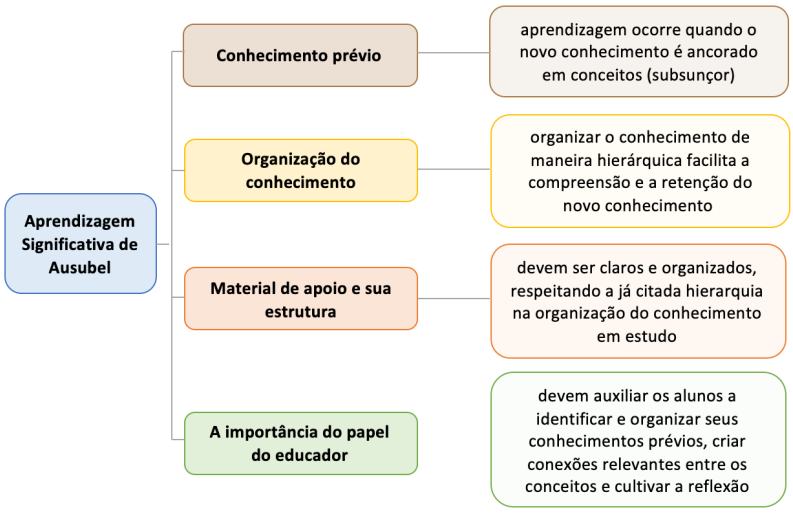
No presente trabalho, esses pressupostos teóricos se materializam na construção e implementação de um modelo matricial estruturado de crescimento populacional, desenvolvido ao longo da oficina descrita na Seção de Materiais e Métodos. A organização da população em

classes etárias, a definição dos parâmetros do modelo e a análise da evolução populacional ao longo do tempo constituem etapas típicas do processo de Modelagem Matemática, vivenciadas pelos estudantes de forma investigativa, colaborativa e contextualizada.

- **Aprendizagem Significativa**

A Aprendizagem Significativa constitui um importante referencial teórico para a compreensão dos processos de ensino e aprendizagem em Matemática, especialmente em propostas que buscam superar a memorização mecânica de procedimentos. Segundo Ausubel (1982), a aprendizagem ocorre de forma significativa quando novos conhecimentos são relacionados, de maneira não arbitrária e substantiva, aos conhecimentos prévios dos estudantes, denominados subsunçores. A Figura 1, ilustra um mapa conceitual que fundamenta a Aprendizagem Significativa segundo Ausubel contendo os principais pontos essenciais que devem ser explorados no processo de aprendizagem.

Figura 1: Mapa conceitual que fundamenta a Aprendizagem Significativa segundo Ausubel contendo alguns pontos norteadores para sua teoria.



Fonte: elaborado pelos autores (2025).

Dessa forma, o papel do ensino consiste em organizar situações que favoreçam tais relações, respeitando a estrutura cognitiva do aprendiz e promovendo a atribuição de significado aos conceitos trabalhados.

No ensino de Matemática, a Aprendizagem Significativa mostra-se particularmente relevante quando os conteúdos são apresentados de forma contextualizada e articulada a situações que façam sentido para os estudantes. A simples exposição de definições e algoritmos, dissociada de contextos de aplicação, tende a favorecer aprendizagens mecânicas e pouco duradouras. Em contrapartida, propostas que envolvem a resolução de problemas, a investigação e a construção de modelos possibilitam que os alunos mobilizem conhecimentos prévios, estabeleçam relações conceituais e compreendam a utilidade dos conceitos matemáticos.

Nesse contexto, a Aprendizagem Significativa enquanto referencial teórico, sustenta e explica os processos de aprendizagem desencadeados por práticas pedagógicas investigativas e estabelece um diálogo direto com os demais eixos teóricos que fundamentam a proposta desenvolvida neste trabalho. A Modelagem Matemática, ao partir de situações contextualizadas e abertas à investigação, favorece a ancoragem de novos conceitos matemáticos nos conhecimentos prévios dos estudantes, criando condições para que a aprendizagem ocorra de forma significativa. Ao investigar fenômenos reais por meio da Matemática, os alunos deixam de atuar como meros executores de procedimentos e passam a construir ativamente significados para os conceitos envolvidos.

A seguir, veremos que o uso de Tecnologias Digitais também contribui para esse processo ao ampliar as possibilidades de visualização, experimentação e análise dos modelos construídos. *Softwares* matemáticos permitem a manipulação de parâmetros, a observação de comportamentos dinâmicos e a comparação de diferentes cenários, favorecendo a diferenciação progressiva dos conceitos e a reconciliação integradora entre ideias matemáticas relacionadas.

- **Uso de Tecnologias Digitais no Ensino de Matemática**

As Tecnologias Digitais têm se consolidado como importantes aliadas no ensino de Matemática, especialmente por possibilitarem a visualização, a experimentação e a simulação de conceitos abstratos. Segundo Borba e Villarreal (2005), os *softwares* matemáticos permitem a realização de cálculos complexos, a manipulação de parâmetros e a análise gráfica de resultados, contribuindo para uma compreensão mais aprofundada dos conteúdos trabalhados.

No contexto da Modelagem Matemática, as Tecnologias Digitais não se configuram como metodologias de ensino, mas atuam como recursos mediadores do processo de aprendizagem. Ao possibilitar a exploração de diferentes cenários, o teste de hipóteses e a observação dos efeitos das variações dos parâmetros do modelo, esses recursos potencializam práticas pedagógicas de caráter investigativo e favorecem a construção de significados pelos estudantes. De acordo com Claudio e Cunha (2001),

> [...] para possibilitar ao aluno construir seu conhecimento, é preciso que o professor escolha um tipo de *software* adequado para isso, como as linguagens de programação, os processadores de texto e os bancos de dados. É imprescindível que o professor tenha um profundo conhecimento do conteúdo que trabalhará e do *software* que adotará. Além disso, ele deve estar sempre interagindo com o aluno, questionando seus resultados, interpretando seu raciocínio e aproveitando os erros cometidos como forma de explorar os conceitos que não ficaram bem esclarecidos.(Claudio e Cunha, 2001, p.174).

Tal afirmação, corrobora com o uso de *softwares*, em especial àqueles que sejam de acesso gratuito, como é o caso do GNU Octave ((GNU Octave, 2025) que pode ser utilizado em diferentes contextos educacionais. Além de aspectos técnicos, a utilização desse tipo de *software* contribui para a autonomia dos estudantes, que passam a compreender e controlar as etapas de implementação computacional dos modelos matemáticos, fortalecendo a relação entre teoria e prática.

Sob a perspectiva da Aprendizagem Significativa, as Tecnologias Digitais desempenham um papel relevante ao permitir a visualização dinâmica dos fenômenos estudados e a experimentação direta dos conceitos matemáticos envolvidos. A representação gráfica da evolução de um modelo, bem como a possibilidade de alterar parâmetros e observar seus efeitos, favorece a diferenciação progressiva dos conceitos e a interpretação crítica dos resultados obtidos (Onuchic e Allevato, 2004 p. 225).

Na experiência descrita neste artigo, o GNU Octave é utilizado como ferramenta central para a implementação computacional do modelo populacional. Conforme detalhado na Seção de Materiais e Métodos, os estudantes utilizam o *software* para construir matrizes, definir parâmetros, executar simulações e gerar gráficos, o que possibilita a experimentação direta dos conceitos matemáticos e fortalece a compreensão da dinâmica populacional por meio de recursos visuais e computacionais.

Como parte integrante deste trabalho, veremos a seguir, que o desenvolvimento da proposta no âmbito da Extensão Universitária confere um sentido social e educacional às atividades realizadas, reforçando o caráter significativo da aprendizagem. Ao aproximar os conteúdos matemáticos de contextos reais e de demandas oriundas da comunidade, a extensão favorece o engajamento dos estudantes e contribui para que os conhecimentos construídos sejam percebidos como relevantes e aplicáveis para além do ambiente acadêmico.

- **Atividades de Extensão Universitária e Formação Educacional**

A Extensão Universitária constitui uma das dimensões formativas do Ensino Superior e caracteriza-se pela articulação entre universidade e sociedade, promovendo a interação entre conhecimentos acadêmicos e demandas sociais (Brasil, 2028). No âmbito deste trabalho, a extensão é compreendida como um contexto formativo no qual se desenvolvem práticas pedagógicas que integram ensino, pesquisa e ação educativa. Esse contexto amplia o alcance das atividades acadêmicas e possibilita experiências de aprendizagem situadas em cenários reais, contribuindo para a formação acadêmica e social dos estudantes envolvidos.

Ao ser desenvolvida no contexto extensionista, a proposta apresentada neste artigo favorece a aproximação entre os conteúdos matemáticos e situações concretas vivenciadas em ambientes educacionais externos à universidade. Essa aproximação cria condições propícias para a implementação da Modelagem Matemática, uma vez que os fenômenos investigados passam a ter referência direta na realidade, permitindo que os estudantes construam, analisem e interpretem modelos matemáticos a partir de dados e problemas contextualizados.

A Extensão Universitária também se articula de forma significativa com os pressupostos da Aprendizagem Significativa. Ao inserir os estudantes em contextos reais de atuação, as atividades extensionistas favorecem a mobilização de conhecimentos prévios e a atribuição de sentido aos novos conceitos matemáticos trabalhados. Dessa forma, os conteúdos deixam de ser percebidos como abstrações desvinculadas da realidade e passam a integrar uma rede de significados construída a partir da experiência, da investigação e da reflexão crítica.

Nesse cenário, o uso de Tecnologias Digitais atua como elemento mediador que potencializa as práticas desenvolvidas no âmbito da extensão. Ferramentas computacionais possibilitam a implementação, a simulação e a análise dos modelos matemáticos construídos,

ampliando as possibilidades de exploração dos fenômenos estudados. Assim como discutido na no tópico anterior desta mesma Seção, as Tecnologias Digitais contribuem para a experimentação, a visualização e a interpretação dos resultados, fortalecendo o caráter investigativo das atividades propostas.

No presente trabalho, a Extensão Universitária configura-se, portanto, como o espaço no qual a Modelagem Matemática é desenvolvida de forma articulada com o uso de Tecnologias Digitais e sustentada pelos pressupostos da Aprendizagem Significativa. Conforme descrito na Seção de Materiais e Métodos, a oficina extensionista constitui o ambiente no qual os estudantes participam ativamente da construção e implementação de um modelo populacional, utilizando recursos computacionais para a análise da dinâmica demográfica. Essa articulação entre contexto extensionista, Modelagem Matemática e mediação tecnológica contribui para a construção de conhecimentos matemáticos contextualizados, significativos e socialmente relevantes.

Materiais e Métodos

A oficina, vinculada ao Projeto de Extensão PAEM (Projeto de Apoio ao Ensino de Matemática) ocorreu em Setembro de 2025 em um laboratório de informática da Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT) no campus universitário do município de Sinop – MT. Para sua realização, contamos com a participação de 9 estudantes do Ensino Médio de uma escola do município de Sinop. Em momento anterior à sua realização, realizamos a seleção e capacitação de três estudantes universitários, para que pudessem monitorar o executor da oficina, sendo este, um aluno do curso de Licenciatura em Matemática. Sendo assim, tivemos um total de quatro universitários em que, o executor principal recebeu orientações dos professores responsáveis para elaboração do material didático, além de orientações dos conceitos e aplicabilidade envolvidos. Já os monitores, foram capacitados pelo executor principal para atuarem como monitores durante as aulas. Para isso, foram realizados seminários e grupos de estudo antes da execução da oficina.

A oficina contou com três encontros de três horas cada, e buscou apresentar aos participantes, uma forma alternativa para compreender os conceitos de matrizes, além de proporcionar uma vivência cooperativa ao trabalharem em grupo, contribuindo também, para

uma interação entre conceitos formais e situações reais por meio de ferramentas computacionais.

Existem inúmeras aplicações envolvendo a teoria das matrizes e, dentre elas, o estudo de modelo estruturado que permite distinguir os elementos de uma população dividindo-a em classes. Este modelo, utiliza matrizes para representar a transição de indivíduos entre diferentes classes etárias, permitindo a previsão da estrutura etária futura da população com base em taxas de natalidade e mortalidade. Como forma de elucidar como as atividades foram desenvolvidas na oficina, apresentamos, um resumo de cada encontro.

1º encontro: Apresentação da oficina e implementação de conceitos básicos matriciais no GNU Octave.

Iniciamos o encontro realizando um debate de 30 minutos sobre as implicações e impactos do crescimento da população de um país, lembrando que o mesmo pode ser feito em municípios. Indagamos aos alunos, como crescimento populacional pode ser uma vantagem ou um desafio, dependendo de como é gerenciado. Investimentos em educação, saúde, infraestrutura e políticas ambientais são fundamentais para garantir que esse crescimento resulte em desenvolvimento sustentável e qualidade de vida para a população. Para tanto, os alunos foram organizados em três trios, de modo que cada grupo pudesse refletir e responder às questões apresentadas no Quadro 1, correspondentes aos temas 1, 2 e 3. Após o momento de reflexão, cada trio expôs os pontos fundamentais de seu respectivo tema e, em seguida, foi realizada coletivamente a leitura e discussão do quarto tema. Os alunos tiveram acesso a computadores e internet para pesquisarem sobre os temas, se necessário

Quadro 1. Questões apresentadas aos participantes da oficina para debate.

Grupo	Tema	Dê sua opinião sobre as afirmações:
1	Impacto Social	**Educação e Saúde:** Uma população crescente exige maior oferta de escolas, professores e infraestrutura educacional, além de hospitais e profissionais de saúde. Se o crescimento for muito rápido, pode sobrecarregar esses serviços. **Infraestrutura Urbana:** Com mais habitantes, há maior demanda por moradia, transporte público e saneamento básico, o que pode gerar desafios, como favelização e aumento da desigualdade social. **Segurança Pública:** O crescimento desordenado pode levar ao aumento da criminalidade, especialmente em regiões com altos índices de pobreza e desemprego.

2	Impacto Econômico	**Mão de Obra e Produção:** Um crescimento populacional bem gerenciado pode ser uma vantagem econômica, pois amplia a força de trabalho e estimula a produção e o consumo. **Sustentabilidade Previdenciária:** Se o crescimento populacional for equilibrado entre jovens e idosos, pode sustentar sistemas previdenciários. No entanto, um envelhecimento populacional acelerado pode comprometer as aposentadorias. **Inovação e Empreendedorismo:** Uma população jovem e bem-educada pode impulsionar o desenvolvimento tecnológico e a inovação no país.
3	Impacto ambiental	**Exploração de Recursos Naturais:** Um maior número de pessoas significa maior demanda por água, energia e alimentos, podendo levar à degradação ambiental. **Poluição e Aquecimento Global:** O aumento do consumo de combustíveis fósseis, produção de resíduos e desmatamento pode acelerar as mudanças climáticas e a poluição dos ecossistemas. **Biodiversidade:** A expansão urbana e agrícola pode resultar na destruição de habitats naturais e na perda de biodiversidade.
4	Impacto Político e Geopolítico	**Pressão sobre Políticas Públicas:** Governos precisam adaptar políticas de planejamento urbano, geração de empregos e distribuição de renda para lidar com o crescimento populacional. **Influência Global:** Países com grande população, como China, Índia e EUA, têm um peso geopolítico significativo, podendo influenciar a economia e a política mundial.

Fonte: elaborado pelos autores (2025).

Após o debate, iniciamos o segundo momento da nossa aula. Como estávamos em um laboratório de informática com 18 máquinas, a maioria dos alunos tiveram, individualmente à disposição, uma máquina e, outros sentaram-se em duplas para executar as atividades propostas. Após explicar um pouco da funcionalidade do GNU Octave, iniciamos atividades relacionadas com os conceitos e operações envolvendo matrizes. Instalamos nas máquinas a versão 10.2.0 do *software*, que correspondia à última versão disponível no momento. Ressalta-se que também existe uma versão online, a qual pode ser acessada pelo endereço eletrônico: https://octave-online.net/. As atividades foram explicadas no âmbito teórico e posteriormente implementadas no *software* Octave. O Quadro 2, ilustra as atividades e também os exercícios que foram propostos para que os participantes executassem no Octave com o auxílio dos monitores (se necessário).

Quadro 2. Atividades desenvolvidas no 1º encontro da oficina.

Atividade 1: O que é uma matriz e como posso representá-la no GNU Octave?

Indicamos por $A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}$ a matriz A com $m \geq 1$ linhas e $n \geq 1$ colunas, tal que m, n são números inteiros positivos, onde i indica a linha e j indica a coluna. Cada elemento a_{ij} da matriz, ocupa a i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz.

Para representarmos uma matriz no *GNU Octave*, usaremos uma ilustração sobre a idade, a altura e o peso de Maria e Paulo. Maria tem 19 anos, pesa 56 quilos e mede 1, 62 metros e, Paulo tem a mesma idade de Maria, pesa 75 quilos e mede 1,78 metros. Podemos sistematizar essas informações por meio da Tabela abaixo, posteriormente, representa-la matricialmente.

Pessoa	Idade (anos)	Peso (Kg)	Altura (metros)
Maria	19	56	1.62
Paulo	19	75	1.78

Matricialmente, temos $A = \begin{pmatrix} 19 & 56 & 1.62 \\ 19 & 75 & 1.78 \end{pmatrix}$, com 2 linhas e 3 colunas.

Para inserirmos a matriz A que representa a Tabela acima no Octave, podemos colocar nossos comandos na "Janela de Comandos" ou então no "Editor" cuja diferença está descrita a seguir.

Janela de Comandos: nessa janela podemos executar os comandos diretamente. Cada linha é executada após ser inserida. É ideal para execuções rápidas e interativas.

Editor: é mais apropriado para o desenvolvimento de scripts completos e estruturados, pois permite salvar o código para reutilizarmos depois. Ideal para quando precisarmos compilar o código várias vezes ou para compartilhar;
Usaremos a janela de comandos para fazer os scritps das atividades da primeira aula por serem conteúdos teóricos, de modo que podemos visualizar os resultados rapidamente.
Abaixo temos a matriz $A = \begin{pmatrix} 19 & 56 & 1.62 \\ 19 & 75 & 1.78 \end{pmatrix}$, com 2 linhas e 3 colunas, no Octave.

```
%comando para inserir uma matriz 3x2
A=[19,56,1.62;19,75,1.78]
```

Atividade 2: Alguns tipos de Matrizes no GNU Octave

Existem alguns tipos de matrizes que devido a sua importância recebem nomes especiais, como é o caso da matriz identidade e da matriz nula. Definimos a matriz identidade (ou matriz unidade) como sendo uma matriz quadrada ($m = n$), dada por $I_n = (a_{ij})_{n\times n}$, tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, se\ i = j \\ 0, se\ i \neq j \end{cases}; \forall\ i, j \in 1, 2, 3, \ldots, n.$$

```
%matriz identidade de ordem 3
I=[1,0,0;0,1,0;0,0,1]
```

Uma propriedade importante da matriz identidade é que para qualquer matriz do tipo $n \times n$ teremos $A.I_n = I_n.A = A$.

```
%definindo uma matriz 2x2
A=[2,-1;3,5]
%definindo a identidade de ordem 2
I=[1,0;0,1]
%produto de A por I
A*I
%produto de I por A
I*A
```

Já a matriz nula, é uma matriz de ordem $m \times n$ em que todos os seus elementos $a_{ij} = 0, \forall\, i \in 1, 2, 3, \dots, m$ e $j \in 1, 2, 3, \dots, n$.

```
%matriz nula 2x4
N=[0,0,0,0;0,0,0,0]
```

Outro tipo de matriz que usaremos em nossas atividades é a matriz transposta. Chamamos de matriz transposta de uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ a matriz dada por $A^t = (b_{ij})_{n\times m}$, cujas linhas são as colunas de A, isto é, $b_{ij} = a_{ji}$.

```
%comando para inserir uma matriz 2x3
A=[19,56,1.62;19,75,1.78]
%comando para obter a transposta da matriz A
At=transpose(A)
```

Chamamos de matriz coluna, matriz dada por $\mathrm{C} = (c_{ij})_{m\times 1}$. Neste caso, a matriz possui somente 1 coluna.

```
%exemplo de uma matriz coluna 3x1
C=[1;5;7]
```

A partir do momento em que compreendemos o significado matemático de uma matriz e também temos uma noção do que ela pode representar no mundo real, podemos avançar para as suas operações.

Atividade 3: Operações entre Matrizes no GNU Octave

Adição de matrizes: Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, matrizes $m \times n$. A adição de A com B, indicada $A + B$, será a matriz $C = A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{m\times n} = \left(c_{ij}\right)_{m\times n}$.

A operação de adição possui suas propriedades sendo elas:

- Comutativa: $A + B = B + A$.
- Associativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- Existência da matriz que representa o elemento neutro: Existe uma matriz nula denotada por O, $o_{ij} = 0, \forall\, i \in 1, 2, 3, \dots, m$ e $j \in 1, 2, 3, \dots, n$, de mesma ordem da matriz A tal que: $A + O = A = O + A$.
- Existência da matriz oposta: Dada uma matriz A, existe uma matriz $B = -A$, tal que $A + -(-A) = O$.

A operação de Subtração deriva da adição ao somarmos uma matriz A com a matriz oposta de uma matriz B, resultando em $A + (-B) = A - B$.

Comandos no Octave:

```
%Escolher as matrizes A, B, C, O (nula) e I(identidade) de mesma ordem
%Usar a matriz numa de mesma ordem para as propriedades
A=[1,2,3;-2,3,4;1,-3,-5]
B=[1,1,0;2,3,-1;3,4,-2]
C=[1,2,6;-2,7,1;3,3,2]
I=[1,0,0;0,1,0;0,0,1]
O=[0,0,0;0,0,0;0,0,0]
%Propriedade Comutativa para a soma A+B=B+A:
A+B
B+A
%Propriedade Associativa para a soma A+(B+C)=(A+B)+C:
A+(B+C)
(A+B)+C
%Existência do elemento Neutro considerando a matriz nula O: A+O=O+A:
A+O
O+A
%Existência do elemento oposto A+(-A)=O=(-A)+A:
A+(-A)
(-A)+A
%Ilustração da operação de subtração A+(-B)=A-B:
A+(-B)
A-B
```

Multiplicação de uma matriz por um escalar: Dados a matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e um número real α, o produto de α por A é a matriz real $m \times n$ dada por:

$$\alpha.A = \begin{pmatrix} \alpha.a_{11} & \alpha.a_{12} & \dots & \alpha.a_{1n} \\ \alpha.a_{21} & \alpha.a_{22} & \dots & \alpha.a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha.a_{m1} & \alpha.a_{m2} & \dots & \alpha.a_{mn} \end{pmatrix}$$

Suas propriedades são dadas por:

- Associativa: $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$; $\alpha\beta$ são escalares reais.
- Distributiva: $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ e $\alpha(A + \beta) = \alpha A + \beta A$.
- Multiplicação do número zero por uma matriz A: $0.A = O$; O é a matriz nula.

Comandos no Octave:

```
%Escolher as matrizes A, B e O e dois escalares a e b:
A=[1,2,3;-2,3,4;1,-3,-5]
B=[1,1,0;2,3,-1;3,4,-2]
O=[0,0,0;0,0,0;0,0,0]
a=2
b=3
%Associativa (ab)A=a(bA):
(a*b)*A
a*(b*A)
%Distributiva (a+b)A=aA+bA e a(A+B)=aA+aB:
(a+b)*A
a*A+b*A
a*(A+B)
a*A+a*B
%Multiplicação do escalar zero por A: 0A=O (O é a matriz nula):
0*A
```

Multiplicação de matrizes: Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e a matriz $B = (b_{ij})_{n\times p}$. O produto $A.B$ (também indicado AB) é matriz $C = (c_{ij})_{m\times p}$ cujo termo geral c_{ij} é obtido somando-se a multiplicação ordenada dos elementos da i-ésima linha pela j-ésima coluna. Matematicamente:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + \cdots + a_{in}.b_{nj};\ \forall\, i \in \{1, \cdots, m\}\ e\ j \in \{1, \cdots, p\}$$

Vale lembrar que, só definimos (ou só existe) o produto de duas matrizes A e B, quando o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B. Além disso, $AB = N$ (matriz nula), somente se $A = N$ ou $B = N$.

```
%Resumo do Script:
%Se você passar duas matrizes, ela tenta multiplicá-las.
%Se não passar nada, ela pede as matrizes interativamente.
%Ela verifica a compatibilidade das dimensões antes de multiplicar.
%Se houver erro, ela avisa e não trava o programa.
%-----------------------------------------------------------------------
%Argumento que recebe as matrizes A e B e retorno o resultado A*B
function C = multiplicar_matrizes(A, B)
% argin retorna o número de arguementos de entrada fornecidos
% Se for menor que 2 (ou seja, o usuário não passou A e B), ...
% entra no modo interativo.
  if nargin < 2
%Mostra uma mensagem informando que o modo interativo será usado.
%input() lê as matrizes que o usuário digitar no terminal.
%As matrizes são armazenadas nas variáveis A e B.
    disp("Modo interativo: digite as matrizes A e B.");
    A = input("Matriz A = ");
    B = input("Matriz B = ");
%Obtém as dimensões das matrizes A e B.
%size(A) retorna o número de linhas e colunas da matriz A.
%Exemplo: se A = [1 2; 3 4], então linA = 2 e colA = 2.
  [linA, colA] = size(A);
  [linB, colB] = size(B);

%Obtém as dimensões das matrizes A e B.
%size(A) retorna o número de linhas e colunas da matriz A.
%Exemplo: se A = [1 2; 3 4], então linA = 2 e colA = 2.
  [linA, colA] = size(A);
  [linB, colB] = size(B);
%Verifica se o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.
%Essa é a condição necessária para multiplicar A * B.
  if colA == linB
%Se as matrizes forem compatíveis, realiza a multiplicação A * B.
%Mostra o resultado no terminal com disp().
    C = A * B;
    disp("Resultado da multiplicação A * B:");
    disp(C);
%Se a multiplicação não for possível, exibe uma mensagem de erro.
%Define C como matriz vazia ([]) para indicar falha no cálculo.
  else
    disp("Erro: número de colunas de A deve ser igual...
    ao número de linhas de B.");
    C = [];
  end
%fim da função
end
```

As propriedades para esta operação são:

- Elemento neutro multiplicativo: $AI = IA = A$; I é a matriz identidade.
- Distributiva à esquerda e à direita, respectivamente, da multiplicação em relação à soma: $A(B + C) = AB + AC$ e $(A + B)C = AC + BC$.
- Associativa: $(AB)C = A(BC)$.
- A transposta da multiplicação entre duas matrizes: $(AB)^t = B^t A^t$.

Em geral, $AB \neq BA$, entretanto, se $AB = BA$ dizemos que as matrizes A e B são comutáveis. Comandos no Octave:

```
%Escolher as matrizes A, B, C,D O (nula) e I(identidade) de mesma ordem:
A=[1,2,3;-2,3,4;1,-3,-5]
B=[1,1,0;2,3,-1;3,4,-2]
C=[1,2,6;-2,7,1;3,3,2]
D=[2,13/14,6/7;-2,23/14,-5/7;1,0,2]
I=[1,0,0;0,1,0;0,0,1]
O=[0,0,0;0,0,0;0,0,0]
%Elemento neutro multiplicativo AI=IA=A:
A*I
I*A
%Distributiva: A(B+C)=AB+AC e (A+B)C=AC+BC:
A*(B+C)
A*B+A*C
(A+B)*C
A*C+B*C
%Associativa(AB)C=A(BC):
(A*B)*C
A*(B*C)
%A transposta da multiplicação entre duas matrizes (AB)^t=B^t A^t:
(A*B)'
B'*A'

%Em geral, AB≠BA:
A*B
B*A
%Aplicação em que AD=DA (matrizes A e D são comutáveis):
A*D
D*A
```

Atividade 4: No Octave, faça o que se pede.

Escreva uma matriz $A = (a_{ij})_{4\times3}$, cujos elementos são os números naturais a partir de zero em ordem crescente iniciando da 1ª linha.
Escreva uma matriz $B = (b_{ij})_{3\times1}$, cujos elementos são os números naturais a partir do número 3 em ordem decrescente iniciando da 1ª linha.
Multiplique a matriz A pelo escalar 2.
Multiplique A pela matriz B.
É possível multiplicar a matriz B pela matriz A? Por quê?
Determine a transposta da matriz B.

Fonte: elaborado pelos autores (2025).

2º encontro: Modelo Estruturado de Crescimento para estimar o crescimento populacional do Brasil implementado no GNU Octave.

Neste encontro, apresentamos para os alunos um modelo que descreve o crescimento populacional do Brasil e implementamos no Octave para predizer tal dinâmica. O Quadro 3, descreve a sequência das atividades propostas.

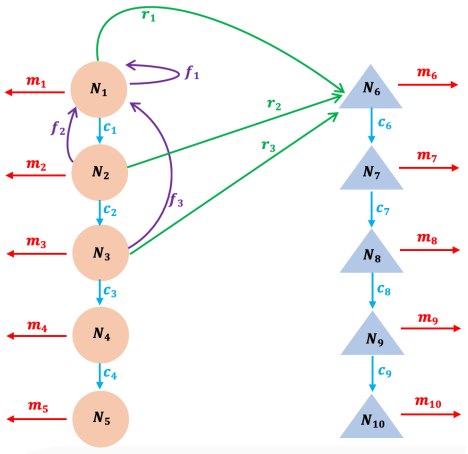
Quadro 3. Atividades desenvolvidas no 2º encontro da oficina.

Atividade 1: O que é um modelo estruturado? Qual o significado do modelo proposto para estimar o crescimento da população do Brasil?
Nesta atividade, explicamos para os alunos o que é um modelo estruturado e como é o modelo que estamos propondo para estimar o crescimento populacional do Brasil.

O modelo: A utilização de modelos discretos, em que o tempo é tratado como uma variável discreta, isto é, em intervalos específicos, como anos por exemplo, possibilita uma abordagem mais prática e direta já que os dados são coletados periodicamente em nosso caso. Assim, a população é representada em etapas sucessivas de tempo, de forma que, a população em cada etapa dependa de sua condição em etapas anteriores (Murray, 2002). O nosso Modelo Estruturado, possui uma variação discreta e linear, já que assume uma relação direta e proporcional entre as variáveis de interesse, simplificando as análises que faremos (Caswell, 2001). Para melhor descreve-lo, seja $N_i(k)$ um vetor que representa a população na classe i (classes etárias) no instante k (número de anos desde o início da simulação do modelo). Em nosso modelo temos cinco classes etárias $i = 1, 2, 3, 4, 5$, variando de 20 em 20 anos e considerando homens e mulheres:

Classe etária (em anos)	Mulheres	Classe etária (em anos)	Homens
$N_1(k)$	$00 \vdash 19$	$N_6(k)$	$00 \vdash 19$
$N_2(k)$	$20 \vdash 39$	$N_7(k)$	$20 \vdash 39$
$N_3(k)$	$40 \vdash 59$	$N_8(k)$	$40 \vdash 59$
$N_4(k)$	$60 \vdash 79$	$N_9(k)$	$60 \vdash 79$
$N_5(k)$	$80 \vdash$	$N_{10}(k)$	$80 \vdash$

No diagrama a seguir descrevemos as relações entre as variáveis do modelo na forma de um diagrama de dinâmica populacional. Este diagrama será útil para nos ajudar na obtenção de uma fórmula de recursão na qual a população no ano $k + 1$ é obtida como função da população do ano k. Também possui uma divisão por gênero e cinco classes etárias sendo $N_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ classes de mulheres e $N_i, i = 6, 7, 8, 9, 10$ classes de homens. O parâmetro $m_i, i = 1, 2, \dots, 10$ corresponde à taxa de mortalidade anual para a classe i e $c_i, i = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9$ é a fração da classe i da população que passa anualmente para a classe $i + 1$ ($c_i \approx \frac{1}{20}$). O parâmetro $f_i, i = 1, 2, 3$ corresponde à média do número de filhas geradas a cada ano por mulher da classe i e $r_i, i = 1, 2, 3$ corresponde à média do número de filhos gerados a cada ano por mulher da classe i.



De acordo com o diagrama, as classes de indivíduos por gênero e faixa etária são representadas por $N_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ (classes de mulheres) e $N_i,\ i = 6, 7, 8, 9, 10$ (classes de homens), sendo definidas no Quadro 3 sendo descritas da seguinte maneira:

Classe 1 (N_1): total de mulheres de 0 até menos de 20 anos de idade.

Classe 2 (N_2): total de mulheres de 20 até menos de 40 anos de idade.

Classe 3 (N_3): total de mulheres de 40 até menos de 60 anos de idade.
Classe 4 (N_4): total de mulheres de 60 até menos de 80 anos de idade.
Classe 5 (N_5): total de mulheres a partir de 80 anos de idade.
Classe 6 (N_6): total de homens de 0 até menos de 20 anos de idade.
Classe 7 (N_7): total de homens de 20 até menos de 40 anos de idade.
Classe 8 (N_8): total de homens de 40 até menos de 60 anos de idade.
Classe 9 (N_9): total de homens de 60 até menos de 80 anos de idade.
Classe 10 (N_{10}): total de homens a partir de 80 anos de idade.

Em relação aos parâmetros do modelo, e de acordo com o diagrama que descreve a dinâmica do modelo, os parâmetros $m_i, i = 1, 2, \dots, 10$ representam uma mortalidade anual, ou seja, reduz a população daquela classe. Por exemplo, se $m_7 = 0.02$, isso significaria que, aproximadamente, 2% da população de homens de 20 até menos de 40 anos falece. Os parâmetros $c_i, i = 1, 2, \dots, 9$ representa a transferência de indivíduos de uma classe para outra devido o envelhecimento. Assim, teremos cerca de $\frac{1}{20}$ dos indivíduos de cada classe sendo transferidos para a classe etária seguinte.

Já o parâmetro $f_i,\ i = 1, 2, 3$ corresponde ao número de nascimentos de filhas geradas a cada ano por uma mulher da classe i. Representa uma fração, da chance anual de uma mulher da classe i ter uma filha mulher. Assim, por exemplo, se $f_3 = 0.03$, significa que há uma chance de 3% das mulheres entre 40 e até menos de 60 anos terem uma filha mulher. Finalmente, o parâmetro $r_i,\ i = 1, 2, 3$ corresponde à média do número de filhos gerados a cada ano por mulher da classe i. Por exemplo, se $r_4 = 0.002$, significa que há uma chance de 0.2% de mulheres com 60 e menos de 80 anos terem filhos homens.

Matematicamente, a população pode ser representada pelo vetor de coordenadas

$$N(k) = \begin{bmatrix} N_1(k) \\ N_2(k) \\ N_3(k) \\ N_4(k) \\ N_5(k) \\ N_6(k) \\ N_7(k) \\ N_8(k) \\ N_9(k) \\ N_{10}(k) \end{bmatrix}.$$

Para obtermos a população no instante seguinte $k + 1$, basta tomar a população no instante anterior k fazendo

$$N(k + 1) = A.N(k),$$

onde A é uma matriz quadrada de ordem 10 que contém os parâmetros do modelo. Como em nosso modelo consideraremos cinco classes etárias para homens e cinco para mulheres, teremos dez equações.

Para obtermos as equações do modelo, usaremos uma relação de recorrência considerando a população da classe no instante seguinte como sendo a mesma população do instante anterior adicionada aos efeitos que fazem a população aumentar e subtraída dos efeitos que a fazem diminuir. Dessa forma obtemos o sistema de equações a partir do diagrama que representa o modelo estrutural, estabelecendo relações de recorrência para todas as classes. Assim,

$$
\begin{aligned}
N_1(k+1) &= (1+f_1-m_1-c_1)N_1(k)+f_2N_2(k)+f_3N_3(k)\\
N_2(k+1) &= c_1N_1(k)+(1-m_2-c_2)N_2(k)\\
N_3(k+1) &= c_2N_2(k)+(1-m_3-c_3)N_3(k)\\
N_4(k+1) &= c_3N_3(k)+(1-m_3-c_3)N_2(k)\\
N_5(k+1) &= c_4N_4(k)+(1-m_5)N_5(k)\\
N_6(k+1) &= r_1N_1(k)+r_2N_2(k)+r_3N_3(k)+(1-m_6-c_6)N_6(k)\\
N_7(k+1) &= c_6N_6(k)+(1-m_7-c_7)N_7(k)\\
N_8(k+1) &= c_7N_7(k)+(1-m_8-c_8)N_8(k)\\
N_9(k+1) &= c_9N_3(k)+(1-m_9-c_9)N_2(k)\\
N_{10}(k+1) &= c_9N_9(k)+(1-m_{10})N_{10}(k)
\end{aligned}
$$

que na forma matricial é dado por $N(k+1)=A.N(k)$, em que, $N(k)$ e $N(k+1)$ têm ordem 10×1 e A tem ordem 10×10. Dessa maneira, obtemos,

$$
\begin{bmatrix} N_1(k+1)\\ N_2(k+1)\\ N_3(k+1)\\ N_4(k+1)\\ N_5(k+1)\\ N_6(k+1)\\ N_7(k+1)\\ N_8(k+1)\\ N_9(k+1)\\ N_{10}(k+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & f_2 & f_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ c_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & c_2 & d_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & c_3 & d_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & c_4 & d_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ r_1 & r_2 & r_3 & 0 & 0 & d_6 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_6 & d_7 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_7 & d_8 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_8 & d_9 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_9 & d_{10}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1(k)\\ N_2(k)\\ N_3(k)\\ N_4(k)\\ N_5(k)\\ N_6(k)\\ N_7(k)\\ N_8(k)\\ N_9(k)\\ N_{10}(k)\end{bmatrix}
$$

onde, $d_i = 1-m_i-c_i$ para os índices $i=2,3,4$, e $d_5=1-m_5$ e $d_{10}=1-m_{10}$.

A solução para o nosso modelo, ou seja, a solução da equação de recorrência, é chamada de função vetorial $N(k)$ que satisfaz a condição inicial $N(0)=N_0$. Para o caso linear suponha conhecido o vetor de população inicial em cada uma das 10 classes. Assim, $N(0)=N_0$ e $N(k)$ satisfaz a relação de recorrência $N(k+1)=AN(k)$. Dessa forma,

$$
\begin{aligned}
N(1) &= AN(0) = AN_0\\
N(2) &= AN(1) = A(AN_0) = A^2N_0\\
N(3) &= AN(3) = A(A^2N_0) = A^3N_0\\
N(4) &= AN(4) = A(A^3N_0) = A^4N_0\\
N(5) &= AN(5) = A(A^4N_0) = A^5N_0\\
N(6) &= AN(6) = A(A^5N_0) = A^6N_0\\
N(7) &= AN(7) = A(A^6N_0) = A^7N_0\\
N(8) &= AN(8) = A(A^7N_0) = A^8N_0\\
N(9) &= AN(9) = A(A^8N_0) = A^9N_0\\
N(10) &= AN(10) = A(A^9N_0) = A^{10}N_0
\end{aligned}
$$

Daí, se estendermos para k, teremos $(k)=A^k.N_0$, e portanto, a solução da equação de recorrência $N(k+1)=AN(k)$ com condição inicial $N(0)=N_0$ é dada por $N(k+1)=A^{k+1}.N_0$ e, considerando que $A^0=I_d$ (I_d = matriz identidade) de ordem n, resulta $N(0)=A^0N_0=I_dN_0=N_0$, tal que, $N(k)$ satisfaz a condição inicial do problema. Como $N(k)=A^kN_0$ é solução da equação de recorrência $N(k+1)=AN(k)$, pois como $N(k+1)=A^{k+1}N_0$ e, além disso, $AN(k)=AA^kN_0=A^{k+1}N_0$, resulta em $N(k+1)=AN(k)$. Portanto, $N(k)$ é solução do modelo.

Atividade 2: A coleta de dados e o sítio eletrônico do IBGE

Para simular nosso modelo precisamos estimar os parâmetros que compõem a matriz A e também precisamos estimar a população inicial N_0. Para isso, coletamos dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) (IBGE, 2025). Apresentamos aqui os dados sem ilustrar quaisquer cálculos em como os mesmos foram obtidos, visto que tais cálculos não abrangem o escopo deste trabalho. Assim, temos:

- População inicial N_0: número total de indivíduos (homens e mulheres) separados por gênero e faixa etária de 20 em 20 anos:

$$N(0) = \begin{bmatrix} 26.721.971 \\ 31.822.712 \\ 28.115.905 \\ 15.059.514 \\ 2.828.223 \\ 27.783.232 \\ 30.759.382 \\ 25.764.064 \\ 12.467.022 \\ 1.758.731 \end{bmatrix}.$$

- Parâmetros f_1, f_2, f_3, r_1, r_2 e r_3 relacionados com as taxas de natalidade: $f_i, i = 1,2,3$ corresponde à probabilidade de uma mulher da classe i ter uma filha do período de um ano; $r_i, i = 1,2,3$ corresponde à probabilidade de uma mulher da classe i ter uma filho do período de um ano. Os cálculos foram elaborados a partir dos dados obtidos no sitio do IBGE (IBGE, 2025).

Parâmetros de Natalidade			
Taxas de nascimentos: Mulheres		Taxas de nascimentos: Homens	
Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
f_1	0,005693918	r_1	0,005964391
f_2	0,033072452	r_2	0,034643461
f_3	0,001878356	r_3	0,001967581

- Parâmetros $m_1, \ldots m_{10}$ relacionados com as taxas de mortalidade: $m_i, i = 1,2,3,4,5$ corresponde à probabilidade anual de uma mulher da classe i falecer; $m_i, i = 6,7,8,9,10$ corresponde à probabilidade anual de um homem da classe i falecer. Os cálculos foram elaborados a partir dos dados obtidos no sitio do IBGE (IBGE, 2025).

Parâmetros de Mortalidade			
Taxas de mortalidade: Mulheres		Taxas de mortalidade: Homens	
Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
m_1	0,000942666	m_6	0,00137259
m_2	0,000944823	m_7	0,002846052
m_3	0,003659306	m_8	0,007099765
m_4	0,020770415	m_9	0,032651736
m_5	0,102748447	m_{10}	0,127678365

- Taxas de crescimento: representam a transferência de indivíduos entre as classes devido ao envelhecimento. Como as classes estão distribuídas de maneira uniforma de 20 em 20 anos, designamos $c = \frac{1}{20}$, logo: $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = c_7 = c_8 = c_9 = c$

Atividade 3: Implementando o modelo e parâmetros da dinâmica populacional no GNU Octave

Para realizarmos uma estimativa do crescimento populacional do Brasil, se faz necessário o uso de um *software* matemático. Utilizaremos o GNU Octave por ser gratuito e com disponibilidade online, favorecendo inclusive, o uso em Chromebooks que são disponibilizados em escolas do Ensino Básico. Código no Octave:

- Iniciamos com o comando "*clear all*" para apagar qualquer comando que tenha ficado na memória;
- Digitar os parâmetros do modelo (usando dados da população do Brasil);

```
%natalidade mulheres
f1=0.005693918
f2=0.033072452
f3=0.001878356

%natalidade homens
r1=0.005964391
r2=0.034643461
r3=0.001967581
```

- Digitar os parâmetros da taxa de crescimento (lembrando que a distribuição é uniforme (de 20 em 20 anos para cada classe);

```
c=1/20
c1=c
c2=c
c3=c
c4=c
c5=c
c6=c
c7=c
c8=c
c9=c
```

- Digitar os parâmetros de mortalidade;

```
m1=0.000942666
m2=0.000944823
m3=0.003659306
m4=0.020770415
m5=0.102748447
m6=0.001372759
m7=0.002846052
m8=0.007099765
m9=0.032651736
m10=0.127678365
```

- Digitar os coeficientes da diagonal da matriz A ;

```
d1=(1+f1-m1-c1)
d2=(1-m2-c2)
d3=1-m3-c3
d4=1-m4-c4
d5=1-m5
d6=1-m6-c6
d7=1-m7-c7
d8=1-m8-c8
d9=1-m9-c9
d10=1-m10
```

- Inserir a matriz de transição A;

```
A=[d1 f2 f3 0 0 0 0 0 0 0;
c1 d2 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 c2 d3 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 c3 d4 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 c4 d5 0 0 0 0 0;
r1 r2 r3 0 0 d6 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 c6 d7 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 c7 d8 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 c8 d9 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 c9 d10]
```

- Inserir o vetor que representa a população inicial: observe que “N0=zeros(10,1)” serve para criar uma variável com zeros. Os demais valores “N0(1), N0(2), etc.”, correspondem às populações iniciais de cada classe;

```
N0=zeros(10,1)
N0(1)=26.721971
N0(2)=31.822712
N0(3)=28.115905
N0(4)=15.059514
N0(5)=2.8282230
N0(6)=27.783232
N0(7)=30.759382
N0(8)=25.764064
N0(9)=12.467022
N0(10)=1.758731
```

- Inserir o comando que define para quantos anos desejamos fazer uma estimativa de crescimento populacional para cada classe que em nosso caso é de 10 anos;

```
max_tempo=10
```

- Inserir comando que define uma matriz de estimativa de crescimento populacional para cada classe (as linhas da matriz representam as 10 classes e os 10 anos estimados são representados pelas colunas da matriz);

```
P=zeros(10,max_tempo+1)
```

- Inserir uma matriz coluna em que temos 10 linhas, sendo os elementos da 1ª coluna as populações de cada classe. As demais colunas representam os anos subsequentes da estimativa;

```
P(1:10,1)=N0
```

- Script que realiza a estimativa da dinâmica populacional de cada classe em 10 anos. Nesse comando, o "1" é o índice da coluna e "max_tempo" corresponde às colunas que cujos elementos são os números populacionais de cada classe em relação aos anos estimados;

```
for t=1:max_tempo
  P(1:10,t+1)=A^t*N0
end
```

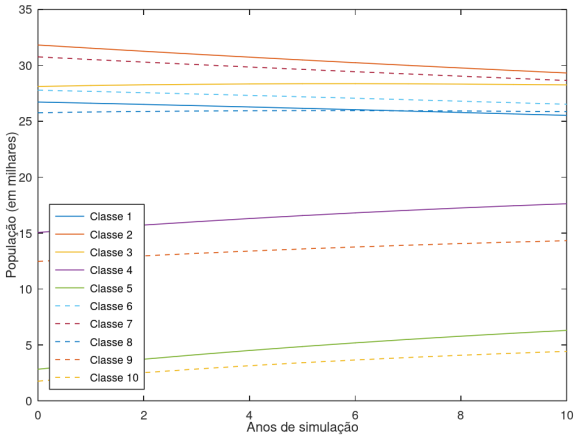
Após implementar o script no Octave, ao final teremos uma matriz que fornece o número total da população brasileira. A 1ª coluna representa a população inicial, a 2ª coluna representa a estimativa do número de indivíduos para cada classe no ano seguinte. As demais colunas representam a projeção de crescimento anual até completar 10 anos de estimativa. Cada linha da matriz corresponde a uma classe de indivíduos. A 1ª linha trata-se da classe de mulheres de 0 até menos de 20 anos (classe 1), a 2ª linha são as mulheres de 20 até menos de 40 anos (classe 2), etc. A classe dos homens aparece a partir da 6ª linha da matriz (classes 6, 7, 8, 9, 10).

```
P =

   26.7220   26.6181   26.5097   26.3971   26.2809   26.1615   26.0391   25.9142   25.7871   25.6580   25.5271
   31.8227   31.5376   31.2618   30.9947   30.7355   30.4838   30.2388   30.0003   29.7676   29.5405   29.3184
   28.1159   28.1984   28.2621   28.3087   28.3394   28.3555   28.3582   28.3484   28.3273   28.2956   28.2543
   15.0595   15.3995   15.7196   16.0202   16.3019   16.5652   16.8107   17.0389   17.2504   17.4460   17.6261
    2.8282    3.2906    3.7225    4.1260    4.5031    4.8555    5.1848    5.4926    5.7802    6.0488    6.2996
   27.7832   27.6731   27.5583   27.4392   27.3165   27.1905   27.0615   26.9300   26.7962   26.6604   26.5229
   30.7594   30.5230   30.2937   30.0707   29.8535   29.6417   29.4348   29.2323   29.0340   28.8395   28.6485
   25.7641   25.8309   25.8821   25.9189   25.9425   25.9539   25.9540   25.9438   25.9240   25.8955   25.8588
   12.4670   12.7248   12.9646   13.1872   13.3932   13.5833   13.7583   13.9189   14.0657   14.1993   14.3205
    1.7587    2.1575    2.5183    2.8450    3.1411    3.4097    3.6535    3.8750    4.0762    4.2590    4.4252
```

- Uma vez compreendido como a estimativa é realizada, inserimos comandos para ilustrar geometricamente o comportamento de cada classe populacional ao longo de 10 anos.

```
figure(1)
 x=0:1:max_tempo
 U1=P(1:5,:) %: significa todas as colunas de 0 a 11
 U2=P(6:10,:)
 plot(x,P(1:5,:))
 hold on
 plot(x,P(6:10,:),'--')
 xlabel('Anos de simulação')
 ylabel('População (em milhares)')
 legend('Classe 1', 'Classe 2', 'Classe 3', 'Classe 4', 'Classe 5', ...
        'Classe 6', 'Classe 7', 'Classe 8', 'Classe 9', 'Classe 10',...
       "location","southwest")
```



Fonte: elaborado pelos autores (2025).

3º encontro: Avaliação dos participantes sobre o modelo matricial de crescimento populacional e sua implementação no GNU Octave

O terceiro e último encontro, foi dedicado à aplicação de atividades práticas e questões que envolvem interpretação de tudo o que foi apresentado e estudado nos encontros 1 e 2. O Quadro 4, ilustra quatro atividades, em que, cada uma tem um tempo sugerido para que os participantes consigam realizá-las.

Quadro 4. Atividades desenvolvidas no 3º encontro da oficina.

Atividade 1: Revisão dos conceitos básicos e realização de algumas estimativas (tempo estimado de 40 minutos)
Propor aos alunos participantes as seguintes perguntas teóricas antes de utilizar o Octave: 1) Explique o que significa um modelo estruturado de crescimento populacional. 2) Qual a importância da matriz de transição em um modelo populacional? 3) Como as taxas de natalidade e mortalidade influenciam a dinâmica populacional? 4) Após 10 anos, qual o percentual da população estará acima de 80 anos? 5) Após 10 anos, qual será uma estimativa para o percentual da população economicamente ativa? (pesquise no Google sobre a faixa etária considerada economicamente ativa). 6) Considerando a população que necessita de instalações escolares como sendo a população até 20 anos, estime o número de pessoas nessa classe dentro de 10 anos. **OBS:** Sobrando tempo, é possível responder as questões pensando projeções anuais diferentes.
Atividade 2: Implementação e análise no GNU Octave (tempo estimado de 1 hora e 40 minutos)
Após os alunos recordarem os conceitos básicos do modelo, além de realizarem algumas estimativas, vamos propor um novo modelo estruturado (mais simples) para que os alunos possam realizar novas estimativas no Octave. **Atividade:** A cidade fictícia de **Auristela** possui uma população dividida em três classes etárias: • 6 mil crianças (0 a 14 anos)

- 9 mil adultos (15 a 64 anos)
- 31 mil idosos (65 anos ou mais)

Deseja-se modelar a dinâmica populacional dessa cidade ao longo de 7 anos utilizando uma matriz de transição que represente as taxas de progressão entre as faixas etárias e a taxa de natalidade gerada pelos adultos. Com base em dados estimados para o ano atual, construa uma matriz de população estruturada e analise a evolução populacional de Auristela ao longo do tempo.

Considere os seguintes parâmetros de natalidade:

$f_1 = 0$: pessoas de 0 até menos de 15 anos de idade não geram novos indivíduos;

$f_2 = 0.25$: corresponde à taxa de natalidade da Classe 2 (população que nasce da população economicamente ativa);

$f_3 = 0$: pessoas com mais de 65 anos de idade não geram novos indivíduos.

Em Auristela as pessoas não adoecem e são saudáveis. Nessa cidade, as pessoas são muito organizadas e cuidadosas umas com as outras. Assim, os indivíduos morrem penas por ocasião da velhice. Logo, os parâmetros de mortalidade são:

$m_1 = 0$: pessoas de 0 até menos de 15 anos de idade não morrem;

$m_2 = 0$: pessoas de 15 até menos de 65 anos de idade não morrem;

$m_3 = 0.15$: taxa de mortalidade das pessoas com mais de 65 anos de idade.

Conforme os anos se passam, as pessoas de Auristela vão mudando de classe, cujas taxas de transição são:

$c_1 = 0.04$: transição da infância/juventude para fase adulta (classe 1 para classe 2 – esse parâmetro não deve ultrapassar $\frac{1}{15}$);

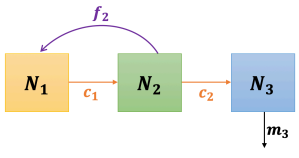
$c_2 = 0.01$: transição da fase adulta para fase idosa (classe 2 para classe 3 – esse parâmetro não deve ultrapassar $\frac{1}{50}$);

Com base nas informações acima faça o que se pede:

a) Represente por meio de um quadro uma população dividida em três faixas etárias: de 0 até menos de 15 anos; 15 anos até menos de 65 anos; a partir de 65 anos.

Classe etária (em anos)	Indivíduos	Descrição das classes
$N_1(k)$	$00 \vdash 14$	**Classe 1 (N_1):** total de indivíduos de 0 até menos de 15 anos de idade (crianças).
$N_2(k)$	$15 \vdash 64$	**Classe 2 (N_2):** total de indivíduos de 15 até menos de 65 anos de idade (adultos).
$N_3(k)$	$65 \vdash$	**Classe 3 (N_3):** total de indivíduos a partir de 65 anos de idade (idosos).

b) Faça um diagrama que represente seu modelo estruturado.



c) Defina o vetor de coordenadas que representa a população inicial.

$$N(k) = \begin{bmatrix} N_1(k) \\ N_2(k) \\ N_3(k) \end{bmatrix} \Rightarrow N(0) = \begin{bmatrix} N_1(0) \\ N_2(0) \\ N_3(0) \end{bmatrix} \Rightarrow N(0) = \begin{bmatrix} 6000 \\ 9000 \\ 31000 \end{bmatrix}$$

d) Monte a matriz de transição A (Sugestão: use o diagrama do item b).

Inicialmente, vamos determinar as equações do modelo para cada classe etária para obtermos a população no instante $k+1$ a partir da população do instante k, ou seja,

$$N(k+1) = A.N(k),$$

em que A é uma matriz quadrada de ordem 3 que contém os parâmetros do modelo. Logo, as equações do modelo são dadas por:

$$\begin{cases} N_1(k+1) &= N_1(k) + f_2N_2(k) - c_1N_1(k) = (1-c_1)N_1(k) + f_2N_2(k) \\ N_2(k+1) &= N_2(k) + c_1N_1(k) - c_2N_2(k) = c_1N_1(k) + (1-c_2)N_2(k) \\ N_3(k+1) &= N_3(k) + c_2N_2(k) - m_3N_3(k) = c_2N_2(k) + (1-m_3)N_3(k) \end{cases}$$

Matricialmente, resulta em,

$$\begin{bmatrix} N_1(k+1) \\ N_2(k+1) \\ N_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-c_1 & f_2 & 0 \\ c_1 & 1-c_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 1-m_3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} N_1(k) \\ N_2(k) \\ N_3(k) \end{bmatrix}.$$

Daí, substituindo os parâmetros obtemos a matriz de transição A dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1-0.04 & 0.25 & 0 \\ 0.04 & 1-0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 & 1-0.15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.96 & 0.25 & 0 \\ 0.04 & 0.99 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0.85 \end{bmatrix}$$

e) Insira no Octave o script relativo às informações fornecidas até aqui.

```
clear all;  %serve para apagar outros comandos que ficaram na memória

%Parâmetros do modelo - usando dados da populacao de Auristela

%natalidade
f2=0.25

%taxa de crescimento
c1=0.04
c2=0.01

%taxa de mortalidade
m3=0.15

%coeficientes da diagonal da matriz A
d1=1-c1
d2=1-c2
d3=1-m3

%Matriz A
A=[d1 f2 0;
c1 d2 0;
0 c2 d3]

%vetor de populacao inicial
%serve para criar uma variável com zeros
%la linha do vetor N0 que nesse caso coincide com a classe 1 do modelo
N0=zeros(3,1)
N0(1)=6000
N0(2)=9000
N0(3)=31000
```

f) No Octave, faça uma evolução temporal da população de Auristela, ou seja, uma projeção para saber qual será o número total da população para daqui 7 anos.
Uma maneira didática para realizar a projeção, consiste em multiplicar as potências da matriz A pelo vetor N0 que representa a população inicial. Assim, para obtermos a projeção de um determinado ano, basta multiplicar a matriz A elevada ao número de anos que queremos estimar pela matriz N0. Esse comando desse ser seguido dos comandos feitos no item (e).

```
%comando de estimativa para cada ano até 7 anos
N0=[6000;9000;31000]
N1=A^1*N0
N2=A^2*N0
N3=A^3*N0
N4=A^4*N0
N5=A^5*N0
N6=A^6*N0
N7=A^7*N0
%matriz em que cada coluna corresponde ao ano estimado das três classes
P=[N0,N1,N2,N3,N4,N5,N6,N7]
```

Outra maneira bastante didática consiste em utilizar recursão, ou seja, o ano seguinte é necessariamente obtido a partir do ano anterior.

```
%comando de estimativa para cada ano até 7 anos
N0=[6000;9000;31000]
N1=A*N0
N2=A*N1
N3=A*N2
N4=A*N3
N5=A*N4
N6=A*N5
N7=A*N6
```

Uma outra forma de realizar a estimativa da população para 7 anos, consiste em escrever um código, sem que haja a necessidade de estimar ano a ano. Então, a partir do que já foi feito no item (e), inserimos os comandos:

```
%comando de estimativa para 7 anos
max_tempo=7

% 3 corresponde as linhas (cada classe)
% e max_tempo+1 ao comando das colunas que correspondem aos anos
P=zeros(3,max_tempo+1)

% (1:3) vai da 1a até a 3a linha
% 1 é o vetor inicial: 1a coluna da matriz que guarda as populações
P(1:3,1)=N0

% 1 é o índice da coluna
% max_tempo são as colunas que corresponde aos anos estimados

for t=1:max_tempo
  P(1:3,t+1)=A^t*N0
end
```

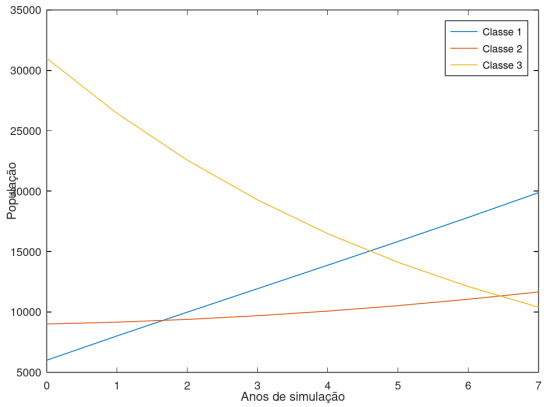
Ao executarmos o scritp no "editor" obtemos a projeção a seguir. Em relação ao formato dos números na "janela de comandos", escrevemos "*format short g*" para obter poucas casas decimais e sem notação científica. Os elementos do vetor x que também pode ser visto como uma matriz linha, representa os anos de evolução. Já a matriz P, fornece o número da população em cada classe, ano a ano.

```
P =

        6000        8010      9977.1       11923       13867       15828       17825       19873
        9000        9150      9378.9      9684.2       10064       10518       11046       11649
       31000       26440       22565       19274       16480       14109       12098       10393
```

g) No Octave, insira o comando para ilustrar graficamente a projeção realizada no item (f).

```
figure(1)
 x=0:1:max_tempo
 U=P(1:3,:) %: na 2a coordenada significa todas as colunas de 0 a 8
 plot(x,P(1:3,:))
 hold on
 xlabel('Anos de simulação')
 ylabel('População')
 legend('Classe 1', 'Classe 2', 'Classe 3')
```



h) Faça a interpretação dos resultados obtidos até o item (g). Quanto foi o aumento ou decrescimento percentual de cada classe? Alguma classe cresce ou decresce significativamente?

Para obtermos o aumento percentual de cada classe, aplicamos a seguinte fórmula obtida por uma regra de três:

$$Aumento\ \% = \left(\frac{valor\ final - valor\ inicial}{valor\ inicial}\right) \times 100$$

Implementando no Octave fazendo um script no "editor" obtemos:

```
% Nomes das classes etárias
classes = {'Classe 1 (0-14)', 'Classe 2 (15-64)', 'Classe 3 (65+)'};

% Pega valores do primeiro e último ano
inicial = P(:,1);
final   = P(:,end);

% Calcula o aumento percentual
percentual = ((final - inicial) ./ inicial) * 100;

% Imprime a tabela
fprintf('\n%-20s %12s %12s %18s\n', 'Classe Etária',...
  'Inicial', 'Final', 'Aumento (%)');
fprintf('%s\n', repmat('-', 1, 65));

for i = 1:length(classes)
  fprintf('%-20s %12.2f %12.2f %18.2f\n', classes{i},...
  inicial(i), final(i), percentual(i));
end
```

Esse script resulta na tabela a seguir (foi retirada da janela de comandos):

```
Classe Etária            Inicial        Final        Aumento (%)
-----------------------------------------------------------------
Classe 1 (0-14)           6000.00     19873.29             231.22
Classe 2 (15-64)          9000.00     11648.77              29.43
Classe 3 (65+)           31000.00     10393.45             -66.47
```

Atividade 3: Alterando os parâmetros (tempo estimado de 20 minutos)

Nessa atividade, os participantes escolhem parâmetros de natalidade e mortalidade incluindo mortalidade m_1 para classe 1 e mortalidade m_2 para classe 2, a fim de implementar em seu script. Cada grupo faz uma escolha diferente e ao final compartilha com a turma seus resultados respondendo as seguintes questões:

a) Em sua escolha de natalidade e mortalidade, que acontece com as classes da população ao longo do tempo?
b) Como a matriz de transição influencia a dinâmica da população?
c) Quais são suas conclusões gerais?

Atividade 4: Encerramento e discussão (tempo estimado de 20 minutos)

Os alunos compartilham suas impressões e aprendizados acerta das atividades da oficina fazendo reflexões críticas acerca de tudo o que foi apresentado.

O professor retoma os temas do Quadro 1 em que foram apresentadas aos participantes questões acerta dos impactos do crescimento e decrescimento de uma população. É um momento importante para saber se os participantes compreenderam a importância social de se estimar dinâmicas populacionais.

Fonte: elaborado pelos autores (2025).

Resultados e Conclusões

Em nossa análise evidenciamos como as atividades propostas contribuíram para a compreensão dos conceitos de matrizes e de modelagem populacional, além de avaliar o engajamento, as percepções e as aprendizagens dos participantes.

No primeiro encontro, houve um engajamento de toda a equipe da oficina para acolher os nove estudantes participantes. Realizamos a apresentação inicial da oficina, explicando como

seriam organizados os encontros e quais conteúdos seriam abordados em cada um deles. Ao final da oficina, aplicamos um questionário com o objetivo de coletar impressões e dados para uma pesquisa qualitativa.

Antes de iniciar as atividades práticas, levantamos duas questões preliminares. A primeira, consistiu em saber se os estudantes já conheciam o *software* GNU Octave e a segunda indagou se os participantes já haviam estudado o tema de crescimento populacional utilizando matrizes. Nenhum aluno relatou ter tido contato prévio com a ferramenta e apenas um estudante mencionou ter tido contato com o tema durante seu 2º ano do Ensino Médio, ao estudar o conteúdo de matrizes. Isso evidenciou que, apesar das tecnologias estarem disponíveis de maneira bastante acessível, em se tratando de ensino, ainda há muito a se fazer para que a tecnologia se torne uma ferramenta realmente útil e presente para a aprendizagem.

Ao apresentar o *software* GNU Octave, navegamos juntos pela interface do programa, destacando suas principais funções, sendo que, na sequência foi apresentada a parte conceitual de matrizes. Ao perguntar aos participantes: "Qual parte do conteúdo você achou mais fácil de compreender?", 77,8% julgou mais fácil utilizar o *software* para comandos básicos, 66,7% os conceitos básicos de matrizes e 44,4% as aplicações e exemplos do cotidiano. Isso mostra que incluir tecnologia ao se ensinar algum conceito, torna a aula mais instigante. Para concluir o primeiro encontro, realizamos algumas atividades práticas de matrizes dentro do Octave. Durante todo o processo, os monitores participaram ativamente, interagindo com os estudantes e auxiliando na resolução dos exercícios. Foi uma aula dinâmica, o que foi essencial para a inserção dos alunos tanto no tema quanto no uso do *software*.

No segundo encontro, apresentando o modelo estruturado de população aos alunos e discutimos a separação da população em classes etárias, os parâmetros envolvidos, a matriz de transição e a equação de resolução do modelo. A maior dificuldade dos estudantes nesse encontro se deu durante a construção das fórmulas de recorrência. Dessa forma, construímos quatro das dez fórmulas de recorrência do modelo juntamente com os alunos para exemplificar o processo, de forma que as demais teriam suas construções de forma análoga.

Além disso, a percepção positiva em relação à forma de explicação foi confirmada, com 100% de aprovação, por uma das questões do questionário aplicado, em que os alunos

destacaram que a apresentação facilitou o entendimento e compreensão do conteúdo. Entretanto, a inserção do modelo no Octave apresentou um desafio para quase 50% dos alunos.

Finalizado a inserção do modelo no Octave, iniciamos as simulações de crescimento populacional. Inicialmente, alguns scripts apresentaram erros, detalhes pequenos como letras, vírgulas ou pontos, que impediram o funcionamento correto da simulação. Foi necessário dedicar um tempo auxiliando individualmente os alunos para que pudessem encontrar e corrigir os erros de digitação.

Ao compilar os scripts no Octave e simular o crescimento da população do Brasil para os próximos 10 anos, vivenciamos o ponto alto do encontro, por perceber que os participantes haviam compreendido todo o processo do início ao fim. Para melhor compreensão, plotamos o gráfico do crescimento populacional, facilitando a visualização do fenômeno estudado.

No terceiro encontro, passamos as orientações para os alunos a respeito do modelo de população estruturada que eles iriam construir. Os participantes conseguiram montar um modelo 2x2 praticamente sozinhos, com nossa intervenção apenas para esclarecer dúvidas pontuais sobre os comandos do programa. Em seguida, corrigimos coletivamente no quadro as perguntas propostas como atividade, reforçando conceitos e estratégias de resolução.

Após a construção do modelo, os alunos simularam os dados no Octave e plotaram o gráfico correspondente. Em seguida, trabalhamos com alterações de parâmetros, observando que pequenas mudanças afetavam consideravelmente toda a análise e os resultados obtidos, o que evidenciou a importância do entendimento das variáveis e suas interações no modelo populacional.

Para compreender melhor o impacto da oficina sobre o interesse e o aprendizado dos alunos, incluímos uma questão sobre o que mais chamou a atenção dos participantes. O *software* Octave teve seu destaque liderando o interesse geral seguido do tema associado a questões sociais entre outros. Quando questionados sobre a relevância de estimar populações usando modelos matemáticos, os alunos apontaram, entre outras ideias, que “é necessário para gestão de recursos, projeção populacional e compreensão de fenômenos sociais, econômicos e planejamento de políticas públicas”, e que “estimar o futuro das populações ajuda a entender como será o crescimento ou decrescimento da população e quais medidas poderão ser tomadas com base nas previsões, auxiliando áreas como saúde e educação”.

Quanto às sugestões para aprimorar a oficina, alguns participantes mencionaram que a inserção de mais exemplos práticos poderia ajudar no processo de familiarização com o programa Octave, e que mais exercícios aplicados ajudariam a fixar melhor o conteúdo. Outros afirmaram que o curso foi bem pensado e executado e que não mudariam nada.

Todos os alunos concordaram que o conteúdo da oficina poderia ser útil fora da sala de aula, indicando o reconhecimento da aplicabilidade prática do que foi aprendido, reforçando a percepção de que a oficina proporcionou conhecimentos relevantes e transferíveis para situações do cotidiano e contextos acadêmicos. A motivação dos alunos para estudar mais conteúdos de maneira semelhante também foi alta: oito alunos afirmaram "sim, com certeza" e apenas um respondeu "sim, dependendo do tema".

O terceiro encontro, portanto, consolidou a aprendizagem, permitiu a aplicação prática do modelo populacional de forma autônoma e demonstrou que os alunos compreenderam tanto os conceitos matemáticos quanto a relevância do uso de ferramentas computacionais para análise de fenômenos reais.

Esta pesquisa e sua aplicação, propiciou aos envolvidos o estudo e aplicação de um modelo de população estruturada, oportunizando aprender e transmitir aos alunos a forma de construir modelos menores, compreendendo, na prática, como esses modelos podem representar situações reais de crescimento populacional. O conhecimento teórico transformou-se em prática durante a oficina, permitindo que estudantes do Ensino Médio se aproximassem de um conteúdo matemático mais abstrato de maneira contextualizada e significativa. Como resultado desse processo, desenvolvemos uma oficina dinâmica e participativa, que possibilitou a integração entre teoria e prática, além de estimular o raciocínio lógico e o interesse dos alunos pelo uso de ferramentas computacionais na Matemática. A atividade também proporcionou uma experiência formativa relevante para os monitores, que participaram ativamente do planejamento, da execução e do acompanhamento das aulas, adquirindo novas habilidades tanto no uso do *software* GNU Octave quanto na mediação pedagógica.

Por fim, a aplicação do questionário qualitativo ao término da oficina permitiu avaliar de forma mais ampla o alcance das ações desenvolvidas. As respostas dos participantes evidenciaram o aprendizado significativo, a boa receptividade da metodologia utilizada e a relevância da abordagem adotada. Dessa forma, este trabalho alcançou seus objetivos,

demonstrando que é possível articular o ensino de Matemática, a tecnologia e a pesquisa de maneira integrada, motivando o aprendizado e promovendo a construção de conhecimentos aplicáveis à realidade dos estudantes.

Referências

AUSUBEL, D. P.. **A aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel**. São Paulo: Moraes, 1982.

BARBOSA, J. C. **Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico**. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. Anais. Rio de Janeiro: ANPED, 2001.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo : Contexto, 2002.

BORBA, Marcelo de Carvalho; VILLARREAL, Mónica E. **Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modelling, Experimentation and Visualization.** Estados Unidos: Springer, 2005, 232 p.

BRASIL, Conselho Nacional de Educação. **RESOLUÇÃO CNE/CES 07/2018**, de 18 de dezembro de 2018. Estabelece as Diretrizes para a Extensão na Educação Superior Brasileira e regimenta o disposto na Meta 12.7 da Lei nº 13.005/2014, que aprova o Plano Nacional de Educação – PNE 2014-2024 e dá outras providências. Brasília: CNE, 2018. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=104251-rces007-18&category_slug=dezembro-2018-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 03/01/2026.

CASWELL, H. **Matrix Population Models: Construction, Analysis, and Interpretation**. 2. ed. Sunderland, MA: Sinauer Associates, 2001. Disponível em: https://archive.org/details/matrixpopulation0000casw. Acesso em: 01/10/2025.

CLAUDIO, Dalcídio; CUNHA, Márcia L. As novas tecnologias na formação de professores de Matemática. In: CURY, Helena N. (org.) **Formação de Professores de Matemática:** uma visão multifacetada. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001. p. 167190.

GNU OCTAVE. Disponível em: http://www.gnu.org/software/octave/. Acesso em 12/08/2024.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA, IBGE. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/. Acesso em 12/09/2024.

KLUBER, T. E.; BURAK, D. **Concepções de modelagem matemática: contribuições teóricas**. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 10, n. 1, p. 17-34, 2008.

MURRAY, J. **Mathematical Biology I: An Introduction**. 3. ed. [S.l.]: Springer, 2002. Disponível em: https://link.springer.com/book/10.1007/b98868. Acesso em: 01/10/2024.

ONUCHIC, Lourdes de la R., ALLEVATO, Norma S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO Maria A. V., BORBA, Marcelo de C. (Org.) **Educação Matemática:** pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

PERKO, Lawrence. **Differential Equations and Dynamical Systems**. 3. ed. New York: Springer, 2013. Disponível em: https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4613-0003-8. Acesso em: 19/09/2024.